

ESTUDIO DE LA SINCRONIZACIÓN DE OSCILADORES CAÓTICOS POR EL MÉTODO DE SISTEMAS ACOPLADOS

Garcés Guzmán Héctor, Ochoa Carrillo Rosa Isela
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez
Av. Plutarco E. Calles # 1210 FOVISSSTE Chamizal
C.P. 32310 Ciudad Juárez, Chih.
hgarces@uacj.mx, rosa_ochoa@utcj.edu.mx

RESUMEN

La sincronización de osciladores caóticos ha sido estudiada ampliamente; aquí se presentan los resultados de un proyecto de investigación sobre este fenómeno, el cual se logra por el método de sistemas acoplados. Este trabajo tiene el propósito de incrementar el conocimiento sobre las condiciones y características de la sincronización de osciladores caóticos unidimensionales. Específicamente se determinó estadísticamente la rapidez de sincronización en base a la realización de diez mil experimentos por parámetro(s) y por tipo de oscilador, como consecuencia se clasificó a los osciladores caóticos bajo estudio en tres grupos en base a la prontitud de la sincronización. Del mismo modo se determinó la existencia de estabilidad en el fenómeno bajo estudio, ya que en estudios anteriores solo se trabajó con tres y ahora se incrementó a once el tipo de oscilador caótico, observándose consistencia en los resultados.

1. INTRODUCCIÓN

Es evidente el avance en la tecnología de la información y las telecomunicaciones ocurrido en las pasadas décadas, a tal grado que los métodos existentes de detección y corrección de errores se ha llevado a los límites marcados por el teorema de capacidad de canal de C. E. Shannon. En consecuencia hay una gran demanda por explorar nuevas técnicas y herramientas como puede ser el caso de las señales caóticas, ya que estas destacan por su amplio ancho de banda y su comportamiento pseudo aleatorio. Sin embargo normalmente se asocia al caos con el desorden, con lo impredecible o con lo confuso, pero hay que hacer notar que la imprevisibilidad se debe al llamado “efecto mariposa”, en otras palabras a la extrema sensibilidad de las condiciones iniciales de los osciladores caóticos. Asimismo es necesario resaltar que el caos está presente en la naturaleza en diversas formas y es estudiado por disciplinas del conocimiento humano tan disímiles como: biología, física, química, matemáticas,

economía, meteorología, geología, filosofía, ingeniería, etc. Aún más la naturaleza como el caos tienen un comportamiento fractal en su geometría y lo encontramos en: hojas, nubes, montañas, costas, etc.

Por lo que se refiere a la sincronización, ésta ocurre cuando dos o más sistemas tienen idéntico comportamiento al mismo tiempo, y en algunas aplicaciones como por ejemplo los enlaces alámbricos o inalámbricos de comunicaciones digitales, la sincronización entre transmisor y receptor es crucial. En cuanto a la sincronización de osciladores caóticos, este fenómeno se ha analizado en gran detalle tanto en forma experimental como teórica, por ejemplo Carroll y Pecora [1] han demostrado que cuando el exponente de Lyapunov de una señal caótica es negativo es posible sincronizarla, otros estudios dieron como resultado la evaluación de los valores de umbral que aseguran la sincronización. De la misma manera, otras investigaciones [2 – 5] establecieron que una pequeña perturbación o una diferencia en parámetros pueden causar la sincronización de señales caóticas. En particular para osciladores caóticos discretos y unidimensionales se han desarrollado dos métodos de sincronía, los cuales son: caos más ruido y sistemas acoplados. Este artículo está enfocado al segundo caso, el cual tiene la ventaja de poder ser aplicado a todos los osciladores, a diferencia del método de caos más ruido el cual solo se puede emplear a algunos osciladores caóticos.

2. DESARROLLO

2.1. Osciladores caóticos

Un oscilador caótico discreto y unidimensional se define como una función no lineal $F: \phi \rightarrow \phi$, cuya función iterativa F o mapa puede ser escrito como

$$\phi(k+1) = F(\phi(k)) \quad (1)$$

Existen numerosas funciones [6] donde se ha observado un comportamiento caótico, entre ellas se seleccionaron para este trabajo las mostradas en la Tabla 1.

Tabla 1 Mapas caóticos unidimensionales.

| Mapa | Definición |
|-----------------------------|---|
| Bernoulli desplazado | $F(\phi(k)) = A\phi(k-1) \bmod 1$ |
| Chebyshev | $F(\phi(k)) = \cos(A \arccos(\phi(k-1)))$ |
| Circulo Seno | $F(\phi(k)) = \phi(k-1) + A - B \sin(\phi(k-1))$ |
| Congruente | $F(\phi(k)) = \begin{cases} B\phi(k-1) - 2A & \text{si } \phi > A \\ B\phi(k-1) & \text{si } \phi \leq A \\ B\phi(k-1) + 2A & \text{si } \phi < -A \end{cases}$ |
| Coseno | $F(\phi(k)) = A \cos(\phi(k-1)) + B$ |
| Cuadrático | $F(\phi(k)) = B - A\phi(k-1)^2$ |
| Exponencial | $F(\phi(k)) = \phi(k-1) \exp(B(A - \phi(k-1)))$ |
| Gaussiano | $F(\phi(k)) = A + \exp(-B\phi(k-1)^2)$ |
| Hopping | $F(\phi(k)) = \begin{cases} D(\phi(k-1) - A) + C & \text{si } \phi > A \\ B\phi(k-1) & \text{si } \phi \leq A \\ D(\phi(k-1) + A) + C & \text{si } \phi < -A \end{cases}$ |
| Logístico | $F(\phi(k)) = A\phi(k-1) (1 - \phi(k-1)^2)$ |
| Tienda | $F(\phi(k)) = \begin{cases} A\phi(k-1) & \text{si } \phi < 0.5 \\ A(1 - \phi(k-1)) & \text{si } \phi > 0.5 \end{cases}$ |

Indiscutiblemente las funciones mostradas en la tabla 1 son deterministas, no obstante tienen características peculiares, una manera de observar su comportamiento es variar el valor de los parámetros constantes (A, B, etc.) y como consecuencia se obtiene el denominado diagrama de bifurcación. Específicamente para el mapa Gaussiano en la figura 1 se ilustra su evolución al variar los parámetros A y B de la siguiente manera; $A \in [-0.8, 0.8]$ y $B = 7.5$. En esta grafica se distinguen dos regiones de operación, en la primera por ejemplo para $A = 0.6$ el resultado de todas las iteraciones siempre es el mismo $\phi(k) = 0.6$, mientras que para $A = -0.6$ el resultado de cada iteración varia en un rango aproximado de $\phi(k) \in [-0.25, 0.4]$, esta es una zona de operación

caótica. Un análisis cuidadoso de la figura no. 1 muestra una alternancia o bifurcación entre regiones caóticas y deterministas.

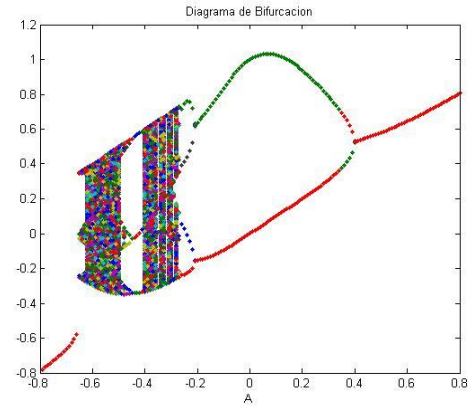


Figura 1 Sincronización de dos pares de osciladores caóticos.

2.2. Sistemas acoplados

El sistema acoplado utilizado en este proyecto fue presentado en [2] y se muestra en la figura no. 2, involucra la sincronización de dos parejas de osciladores. Específicamente, incluye cuatro osciladores caóticos: dos maestros ($\phi_1(k)$ y $\phi_2(k)$) y dos esclavos ($\Phi_1(k)$ y $\Phi_2(k)$) y están relacionados de la siguiente manera:

$$\phi_1(k+1) = F_1(\phi_1(k)) \quad (2)$$

$$\phi_2(k+1) = F_2(\phi_2(k)) \quad (3)$$

$$\Phi_1(k+1) = F_1(\Phi_1(k)) + \varepsilon[F_1(\phi_1(k)) + F_2(\phi_2(k)) - F_1(\Phi_1(k)) - F_2(\Phi_2(k))] \quad (4)$$

$$\Phi_2(k+1) = F_2(\Phi_2(k)) + \varepsilon[F_1(\phi_1(k)) + F_2(\phi_2(k)) - F_1(\Phi_1(k)) - F_2(\Phi_2(k))] \quad (5)$$

donde ε es un factor de acoplamiento que en [2] se determinó que simplifica el sistema si $\varepsilon = 1/2$. Se puede establecer que el sistema estará sincronizado cuando:

$$\Phi_1(k) = \phi_1(k) \quad (6)$$

$$\Phi_2(k) = \phi_2(k) \quad (7)$$

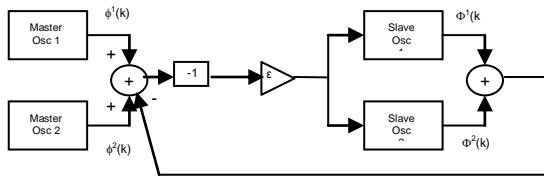


Figura 2 Sincronización de dos pares de osciladores caóticos.

Hay que hacer notar que en este estudio de sincronía, para el arreglo descrito en la figura no. 2 se emplearon los mapas de la tabla 1. Asimismo y considerando el comportamiento pseudo aleatorio de los osciladores discretos y unidimensionales definidos en (1), para garantizar una respuesta caótica de los osciladores, en la tabla no. 2 se presentan los valores específicos de los parámetros empleados.

Tabla 2 Valores de los parámetros.

| Mapa | Parámetros | |
|-----------------------------|--|--|
| | Maestro-Eslavo 1 | Maestro-Eslavo 2 |
| Bernoulli desplazado | $A = 3.7$ | $A = 3.8$ |
| Chebyshev | $A = 3$ | $A = 3$ |
| Circulo Seno | $A = 2\pi$ $B = 1.8$ | $A = 2\pi$ $B = 1.8$ |
| Congruente | $A = 0.01$ $B = 1.8$ | $A = 0.01$ $B = 1.8$ |
| Coseno | $A = \pi/2$ $B = 47\pi/64$ | $A = \pi/2$ $B = 47\pi/64$ |
| Cuadrático | $A = 3$ $B = 1.3$ | $A = 3$ $B = 1.3$ |
| Exponencial | $A = 1$ $B = 3$ | $A = 1$ $B = 3$ |
| Gaussiano | $A = -0.6$ $B = 7.5$ | $A = -0.6$ $B = 7.5$ |
| Hopping | $A = 0.24$ $B = 2.5$ $C = 0.6$ $D = -2$ | $A = 0.24$ $B = 2.5$ $C = 0.6$ $D = -2$ |
| Logístico | $A = 3.7$ | $A = 3.9$ |
| Tienda | $A = 1.5$ | $A = 1.2$ |

3. RESULTADOS

Con el propósito de estudiar la sincronización por el método de sistemas acoplados se realizaron simulaciones numéricas en Matlab. En particular, cada observación de sincronización consto de diez mil experimentos y se exploraron los once mapas caóticos listados en la tabla 1.

El proceso de sincronía se puede analizar examinando su evolución en el tiempo, en este caso en la figura no. 3 se observa el desarrollo de un experimento donde se sincronizaron por el método de sistemas acoplados dos pares de osciladores maestro-esclavo que operan con el mapa Chebyshev. La sincronización se alcanza después de ocho iteraciones cuando ambos osciladores (maestro y esclavo) producen la misma señal caótica $\phi(k)$, tal como lo establecen las ecuaciones (6 - 7).

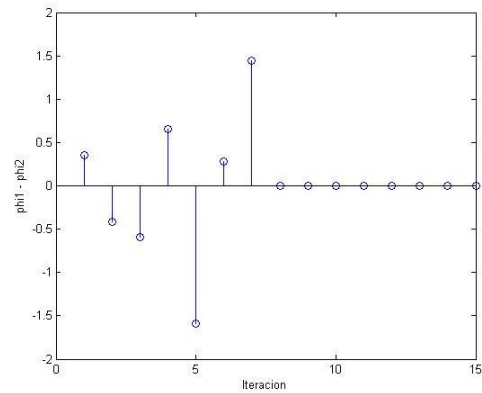


Figura 3 Un experimento de sincronización usando el mapa Chebyshev.

Uno de los factores para evaluar el desempeño del arreglo mostrado en la figura 2, para la sincronización de osciladores caóticos es mediante la rapidez con que se logra. En particular se denomina índice de sincronización al número de iteraciones que realizan los osciladores hasta conseguirla. En [5] se reportaron las mediciones de este parámetro para las señales caóticas: Bernoulli, Logística y Tienda, en cambio para este estudio como se mencionó con anterioridad se amplió la cantidad de mapas a once, así pues en la tabla no. 3 se muestran los resultados obtenidos en este trabajo de investigación.

Tabla 3 Índice de sincronización.

| Mapa | Mínimo | Máximo | Valor esperado | Desviación estándar |
|-----------------------------|--------|--------|----------------|---------------------|
| Bernoulli desplazado | 12 | 30 | 16.03 | 2.16 |
| Chebyshev | 8 | 53 | 13.01 | 4.49 |
| Círculo Seno | 90 | 132 | 126.01 | 5.94 |
| Congruente | 1208 | 1216 | 1209.8 | 0.82 |
| Coseno | 50 | 94 | 90.04 | 3.42 |
| Cuadrático | 11 | 21 | 13.35 | 0.86 |
| Exponencial | 5 | 134 | 13.49 | 7.82 |
| Gaussiano | 18 | 48 | 42.46 | 3.39 |
| Hopping | 1026 | 2017 | 1059 | 67.80 |
| Logístico | 22 | 2880 | 663.46 | 270.88 |
| Tienda | 22 | 165 | 60.63 | 19.25 |

En la tabla no. 3 se reporta para el índice de sincronización sus valores: mínimo, máximo, esperado y la desviación estándar. Tomando en cuenta la naturaleza estadística de los experimentos en la figura 4 se muestra el histograma de los diez mil experimentos de sincronización realizados usando el oscilador caótico Gaussiano. Claramente se observa que como lo indica su desviación estándar (3.39) la mayoría de los experimentos tienen una rapidez cercana al valor esperado (42.46).

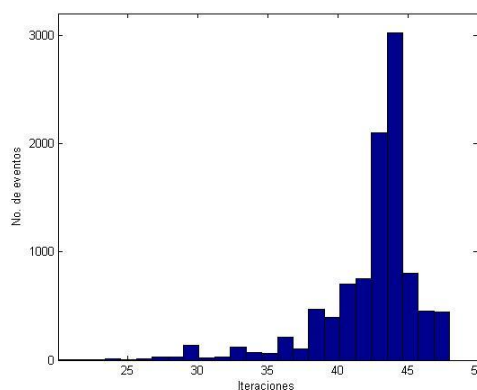


Figura 4 Histograma de la sincronización por sistemas acoplados para el mapa Gaussiano.

En general las figuras 5 y 6 exhiben los dos principales indicadores estadísticos; el valor esperado y la desviación estándar de los once osciladores caóticos. En particular la figura no. 5 ilustra el comportamiento de los mapas bajo estudio mediante el valor esperado de los diez mil experimentos, resalta que un gran número de mapas, el 64% requirió de menos de cien iteraciones, mientras que un reducido 18% de ellos lograron sincronizarse en más de mil iteraciones.

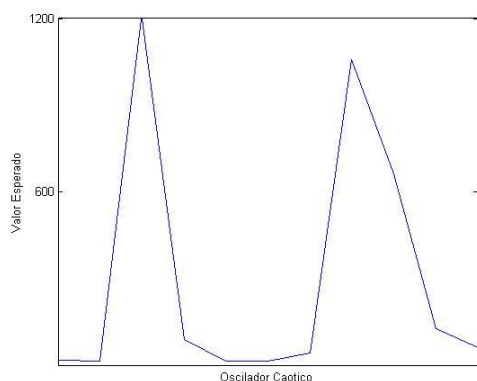


Figura 5. Valor esperado del índice de sincronización

Una medida de la estabilidad del proceso de sincronización es la desviación estándar de los experimentos y como se puede observar en la figura no. 6 solo dos mapas tienen una gran dispersión, en particular el oscilador Logístico tiene una amplia diseminación en los resultados estadísticos lo que se debe a la enorme diferencia

entre los valores mínimo y máximo del índice de sincronía. Otro caso de una desviación estándar grande es el mapa Hopping, pero en este caso es diferente ya que en promedio requiere de más de mil iteraciones para lograr la sincronía.

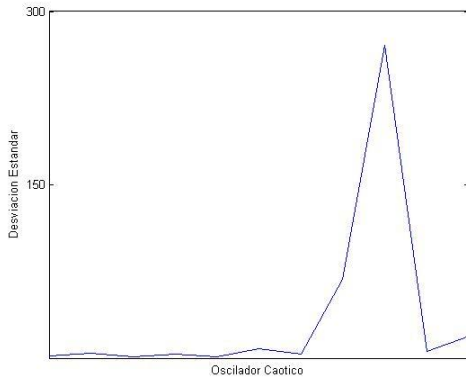


Figura 6. Desviación estándar del índice de sincronización

4. CONCLUSIONES

Con este trabajo se lograron extender los resultados previamente reportados en la literatura, así como profundizar en el conocimiento del fenómeno de sincronización de señales caóticas unidimensionales, en el caso de los sistemas acoplados. Para lograr lo anterior fue primordial el uso de herramientas estadísticas, específicamente se obtuvo el valor mínimo y máximo, el valor esperado y la desviación estándar del índice de sincronización o velocidad de sincronización.

Partiendo de los resultados previos [4] que indicaron que el método de sincronización denominado caos más ruido tenía limitaciones en cuanto al tipo de osciladores caóticos, en este proyecto se continuo empleando el método de los sistemas acoplados y se amplió sustancialmente de tres a once mapas el área de conocimiento. Por otro lado se lograron identificar la existencia de osciladores que se sincronizan muy rápido, esto es en menos de veinte iteraciones en promedio, mientras que se estableció que solo dos de los mapas estudiados logran la sincronización en más de mil iteraciones. Para continuar con el estudio ahora es necesario determinar si los mapas rápidos, en realidad lo son para la mayoría de las regiones de comportamiento caótico y lo mismo con los lentos. En otras palabras ahora habrá de determinarse si los resultados reportados son

consistentes con diferentes valores de sus parámetros.

En resumen el tener un mejor conocimiento de la sincronización de señales caóticas permitirá el diseño de mejores aplicaciones donde su uso sea recomendado.

5. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Carroll T.L., Pecora L.M., *Synchronization in Chaotic Systems*, Phys. Rev. Lett., vol. 64, pp 821-824, 1990.
- [2] Martian A, Banavar J.R., *Chaos, Noise, and Synchronization*, Phys. Rev. Lett., vol. 72, pp 1451-1454, 1994.
- [3] Malescio G, *Effects of Noise on Chaotic One-dimensional Maps*, Phys. Lett. A, vol. 218, pp 25-29, 1996.
- [4] Garcés H., *Wideband Chaotic Signal Analysis and Processing*, Dissertation, The University of Texas at El Paso, 2007.
- [5] Ochoa Carrillo Rosa Isela, Garcés Guzmán Héctor, Hinostroza Zubia Victor, Mendoza Carreón Alejandra, *Sincronización de señales caóticas unidimensionales por el método de sistemas acoplados*, Proceedings ICSS, 31th International Congress of Electronic Engineering, Chihuahua, Chih., vol. XXXI, pp. 168 - 171, ISSN 1405-2172, Octubre 2009.
- [6] Kennedy M.P., Rovatti R., Setti G., *Chaotic Electronics in Telecommunications*, CRC Press, ISBN 0-8493-2348-7, 2000.
- [7] Tsimring L.S., Sushchik M.M., *Multiplexing Chaotic Signals Using Synchronization*, Phys. Lett. A, vol. 213, pp 155-166, 1996.
- [8] Liu Y, Davis P, *Dual Synchronization of Chaos*, Phys. Rev. E, vol. 61, pp R2176-R2179, 2000.
- [9] Lim W, Kim S.Y., *Coupling Effect on the Occurrence of Partial Synchronization in four Coupled Chaotic Systems*, Phys. Lett. A, vol. 353, pp 398-406, 2006.