

## MODELO CINEMÁTICO PARA UN SIMULADOR DE CONTROL DEL METRO

Saúl de la O Torres, Jesús Alfredo Martínez Nuño, Jesús Yaljá Montiel Pérez  
 Instituto Politécnico Nacional - Escuela Superior de Computo Av. Juan de Dios Bátiz s/n esq. Miguel Othón  
 de Mendizábal. Unidad Profesional Adolfo López Mateos. Col. Lindavista C.P. 07738, México, D. F.  
 sdelaot@ipn.mx jmartinezn@ipn.mx

### RESUMEN

Plantear el modelo cinemático de un móvil [2] tal como un tren ferroviario es complejo, ello implica tener en cuenta las enormes cifras en peso del tren y usuarios, aceleración y fuerzas que intervienen en su desplazamiento todo con el fin de realizar los cálculos necesarios que permitan modelarlo adecuadamente en un lenguaje de programación. Por ejemplo una aceleración de confort para los pasajeros del tren es de aproximadamente 1.2 a 1.4 m/s<sup>2</sup> y el control sobre los trenes exige ciertos tipos de marchas, las cuales dependen de las condiciones en las que el circuito de vía en ese instante se presenten, una de ellas podría ser lluvia en zonas donde el tren corre por la superficie del suelo o en vías elevadas y con ello se pierde tracción.

Otras condiciones tomadas en cuenta son las fuerzas que intervienen en el modelo como son la fuerza motriz, ya que se están modelando trenes eléctricos como los de la ciudad de México, ellos cuentan con seis motrices activas, así con la fuerza de la gravedad y la fuerza de fricción; igualmente importantes son las velocidades, tiempos de recorrido y posiciones actuales de cada tren dentro del circuito de vía.

### 1. INTRODUCCIÓN

En el Puesto Central de Control del Sistema de Transporte Colectivo Metro se reciben datos de los trenes en las líneas del Metro y con base en estos datos se realiza el control necesario para la operación de la línea [1].

Para el simulador de control de una línea del Metro se requiere un modelo de simulación que cree las condiciones que se tienen realmente, así como hacer los planteamientos necesarios para representar las posibles averías y situaciones dentro del circuito de vía [2].

Los trenes del Sistema de Transporte Colectivo Metro circulan sobre vías fijas. Estos recorridos tienen características particulares para cada una de

las líneas del Metro [1], por ejemplo la línea nueve se desplaza a lo largo de quince kilómetros por terreno subterráneo, al ras del suelo y sobre vías elevadas.

Para poder realizar un buen planteamiento del simulador fue necesario modelar la información real, de al menos un circuito de vía tomando en cuenta todas las condiciones físicas y geográficas del terreno, en segundo término se hicieron los cálculos físicos cinemáticos de un tren y con los resultados obtenidos, se modeló empleando el paradigma orientado a objetos.

### 2. DESARROLLO

Con la información física del plano de perfil de vía [3], se extrajeron los datos necesarios para comenzar a trabajar el modelo, la información de los trenes y la física aplicada sirvió para crear el modelo.

#### 2.1. El modelo matemático de curvas

Para generar las alturas se dispuso el eje de las Z, tal como se muestra en la figura 2.1.

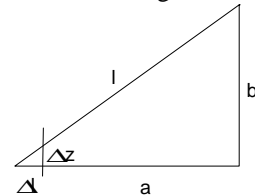


Figura 2.1 Eje de las Z

Donde se sabe que

$$m = \frac{b}{a} \quad (1)$$

donde  $m$  es la pendiente,  $a$  el cateto adyacente y  $b$  el cateto opuesto de un triángulo rectángulo.  $\Delta z$  es el cateto opuesto y se puede expresar con

$$\Delta z = m \cdot Dl \quad (2)$$

$\Delta l$  es una diferencia en la hipotenusa y se tomó con valores de 10 m. Cada 10 m se tiene una

coordenada.

Para calcular el siguiente valor de z

$$z_i = z_{i-1} + D/l \cdot m \quad (3)$$

Para generar los puntos (x, y) relacionados con las curvas se emplea la figura 2.2:

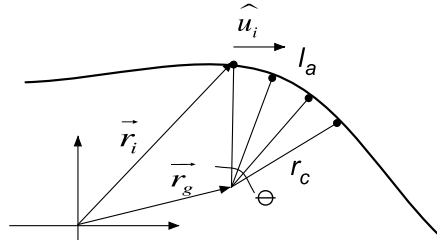


Figura 2.2 Gráfica empleada para generar los circuitos de vía con curva.

Donde:

$r_c$  es el radio de curvatura de la vía.

$l_a$  es una longitud de arco.

$\vec{r}_i$  es la coordenada (x, y) del punto i-ésimo.

$\hat{u}_i$  es un vector unitario en la dirección del vector  $\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}$  con  $\hat{u}^+ \wedge \hat{u}^-$  y entonces de acuerdo a la figura 2.3:

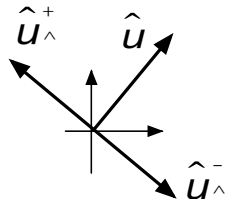


Figura 2.3 Dirección del vector

Se tiene que  $\hat{u} = (\hat{u}_x, \hat{u}_y)$  y además que  $\hat{u} \times \hat{u}^+ = 0$ , entonces  $\hat{u}^+ = (u_y, -u_x)$  y  $\hat{u}^- = (-u_y, u_x)$  que se representan gráficamente como se muestra en la figura 2.4a y 2.4b

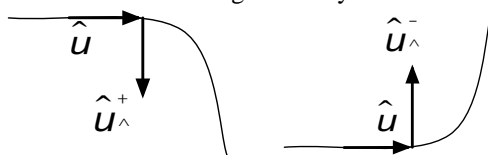


Figura 2.4 Representación de los vectores.

El punto de giro  $\vec{r}_g$  esta dado por

$$\vec{r}_g = \vec{r}_i + r_c \times \hat{u}^+ \quad (4)$$

con

$$r_c \times q = l \quad \Rightarrow \quad q = \frac{l}{r_c} \quad (5)$$

de la figura 2.5, se obtienen los vectores

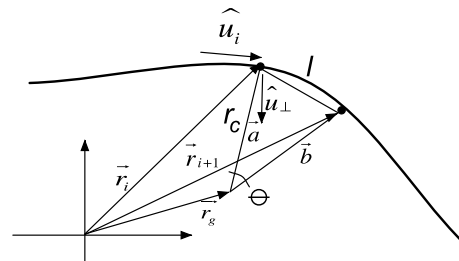


Figura 2.5 Obtención de los vectores de la matriz de rotación.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{r}_i - \vec{r}_g \\ \vec{a} &= -r_c \hat{u}^+ \end{aligned} \quad (6)$$

con una matriz de rotación

$$R_q = \begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix} \quad (7)$$

con la cual se tiene

$$\vec{b} = R_q \times \vec{a} \quad (8)$$

por lo tanto

$$\vec{r}_{i+1} = \vec{r}_g + \vec{b} \quad (9)$$

se define

$$\hat{b} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \quad (10)$$

Lo cual queda representado en la figura 2.6

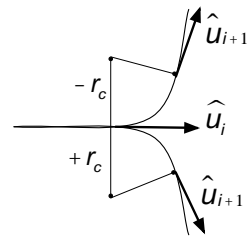


Figura 2.6 Representación final de los vectores.

Con las expresiones anteriores y el siguiente

dibujo donde se representa una curva en una línea del Metro y se representa por

$$\hat{u}_{i+1} = \text{Sgn}(r_c) (\vec{b}_y - \vec{b}_x) \quad (11)$$

## 2.2. Análisis de fuerzas.

En las pendientes, actúa la fuerza de gravedad [4] con

$$F_g = -m \times g \times \text{sen} \theta \quad (12)$$

Donde

$F_g$ , es la fuerza de gravedad [N].

$m$ , es la masa del tren con pasajeros [kg].

$g$ , es la aceleración de la gravedad [m/s<sup>2</sup>].

La fuerza de los vagones del Metro con motores (motrices) se representa por:

$$F_m = F_{\max} \frac{n}{6} t \quad (13)$$

Donde

$F_{\max}$ , es la fuerza máxima que puede ejercer los vagones con las motrices [N].

$n$ , es el número de motrices activas,  $0 \leq n \leq 6$ .

$t$ , es el grado de tracción.

Lo anterior se representa en la imagen de la figura 2.7

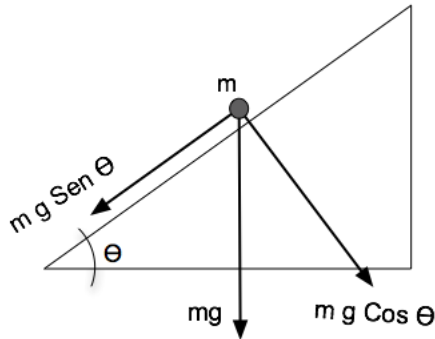


Figura 2.7 Representación de fuerzas

La fuerza de fricción se modela como una fuerza proporcional a la magnitud de la velocidad en sentido contrario a la dirección de movimiento.

$$F_f = -C \times v \quad (14)$$

Donde

$C$ , es una constante a determinar [kg/s].

$v$ , es la magnitud de la velocidad del tren [m/s].

La fuerza máxima que puede ejercer las motrices de los vagones se tienen los siguientes datos:

El peso de un tren del metro se estima con:

M 28,930 kg x 2 = 57,860 kg

N 27,830 kg x 4 = 111,320 kg

R 20,837 kg x 3 = 62,511 kg

Peso del tren = 231,691 kg

El peso de los pasajeros en un tren lleno a 4/4 se estima con

Sentados + Pie = total

349 + 1181 = 1530 pasajeros

1530 pasajeros x 70 kg (promedio) = 107,100 kg

a 1/4 es un peso de 26,775 kg, un tren tiene 9 vagones por lo que el peso por vagón es de 2,975 kg.

La aceleración máxima del tren a 3/4 es de 1.2 m/s<sup>2</sup>. Por lo que la fuerza máxima que se ejerce para el movimiento de un tren:

$$F = m \times a \quad (15)$$

donde  $F$  es la fuerza [N].

$m$ , es la masa [kg].

$a$ , es la aceleración [m/s<sup>2</sup>].

Entonces la fuerza máxima,  $F_{\max}$ ,

$F_{\max} = (\text{masa del tren} + \text{masa de pasajeros}) \times \text{aceleración}$

$$F_{\max} = (231,691 \text{ kg} + 26,775 \text{ kg} \times 3) \times 1.2 \text{ m/s}^2 = 374,419.2 \text{ N}$$

y la fuerza máxima por motriz, considerando que el tren tiene 6 motrices.

$F_{\max/\text{motriz}} = F_{\max} / \text{No. de motrices}$

$$F_{\max/\text{motriz}} = 374,419.2 / 6 = 62,403.2 \text{ N}$$

La fuerza de frenado de urgencia a 4/4 de carga con des aceleración de 2.0 m/s<sup>2</sup>, se estima con

$F_{fru} = m \times a$

$$F_{fru} = (231,691 + 107,100) \times 2.0 = 677,582 \text{ N}$$

La desaceleración máxima de servicio a 3/4 es de 1.8 m/s<sup>2</sup>, entonces la fuerza máxima de servicio se estima con

$F_{frs} = m \times a$

$F_{frs} = (\text{masa del tren} + \text{masa de pasajeros}) \times \text{aceleración}$

$$F_{frs} = (231,691 \text{ kg} + 26,775 \text{ kg} \times 3) \times 1.8 = 561,628.8 \text{ N}$$

### 2.3. Cinemática de un tren del metro.

Dada la fuerza total sobre un tren del metro

$$F_T = F_{\text{max/motriz}} + F_f + F_g$$

donde  $F_{\text{max/motriz}}$  es la fuerza máxima por motriz de un tren del metro.

$F_f$  es la fuerza de fricción y

$F_g$  es la fuerza debido a la gravedad que se tiene en un tren en las pendientes.

Se puede calcular la magnitud de la aceleración que experimenta un tren de (15)

$$a = \frac{F_T}{m} \quad (16)$$

En un instante de tiempo  $DT$  esa aceleración se puede considerar como constante

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (17)$$

integrando la expresión se tiene

$$DV = aDT \quad \text{y que para un tren del metro queda}$$

$$v_t = v_i + aDT \quad (18)$$

$$\text{como } v = \frac{dx}{dt} \quad \text{la integral queda}$$

$$x_t = x_i + v_iDT + \frac{1}{2}a(DT)^2 \quad (19)$$

donde  $v_i$  = velocidad inicial

$v_t$  = velocidad final después de  $DT$

$x_i$  = posición inicial

$x_t$  = posición final después de  $DT$

### 3. RESULTADOS

Con los datos calculados y las expresiones (18) y (19) se calcula para cada  $DT$  las variaciones en la velocidad y la posición del tren. con este modelo se genera una simulación de los movimientos de un tren del metro considerando las características que tiene una línea del metro como las curvas, rectas, pendientes positivas y negativas, así como aceleraciones en las diferentes maniobras que tiene un tren del metro.

La figura 3.1 muestra la línea 9 del metro con correspondencia Pantitlán a Tacubaya. Se tiene modelada la línea tal como es realmente. Se tiene la vista frontal y superior de la línea, se representan los trenes con bloques rojos.

### 4. CONCLUSIONES

Empleando modelos simples se logra una adecuada simulación para dar capacitación al personal del Sistema de Transporte Colectivo Metro de la ciudad de México.

A pesar de la simpleza se logra un simulador de alcance total, donde se pueden emular todos los eventos posibles.

Los modelos se implementaron con un lenguaje orientado a objetos como Java, con ello se logró modelar los trenes de forma adecuada empleando hilos de programación [5].

Dentro del modelo se considera el efecto de la geometría de las vías, por ello se desglosó el análisis de curvas y pendientes.

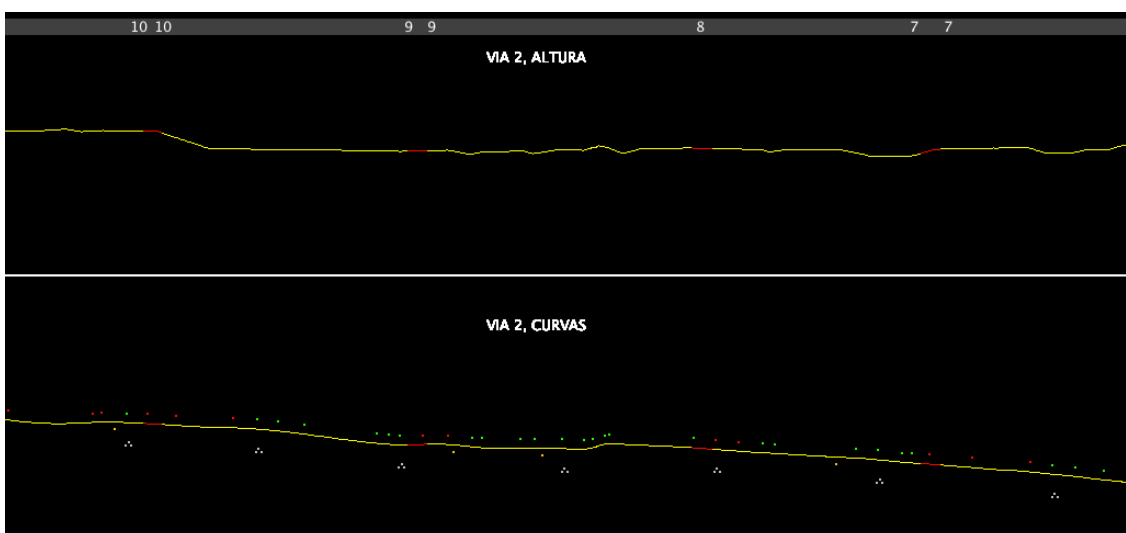


Figura 3.1 Perfil de la vía.

## 5. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Sistema de Transporte Colectivo  
***Operación de una línea del metro***  
 Resumen ejecutivo, México D. F. 28 de  
 Junio de 2006
- [2] Sistema de Transporte Colectivo  
***Instructor (Operación del simulador  
 BINOI)***  
 México D. F. Diciembre 2003
- [3] Sistema de Transporte Colectivo  
***Plano de perfil, señalización y  
 alimentación tracción de la línea 9***  
 Dirección de Ingeniería y desarrollo  
 tecnológico 2004.
- [4] Haliday, Resnick & Krane  
 Física Volumen 1  
 Tercera edición México D. F. Ed. Cecs
- [5] Bruce Eckel  
 Piense en Java  
 Ed. Pearson 2003.