

## MODELADO MATEMÁTICO PARA EL DISEÑO DE UN CONTROL DE PRESIÓN DE UN SISTEMA PROTOTIPO DE RED DE AGUA

Áreas técnicas: Monitoreo y control de procesos, Automatización

Manzanares-Maldonado Alejandro, Rojas-Estrada Juan-Antonio\*, Quintero-Álvarez Patricia,  
Sanjuán-Galindo René, Rincón-Martínez Ernesto-Jesús

Instituto Tecnológico de Nuevo León

Posgrado en Ingeniería Mecatrónica, División de Estudios de Posgrado e Investigación

Ave. Eloy Cavazos 2001, Col. Tolteca, Guadalupe, N.L. C.P. 67170, México

[alessandro.mty@gmail.com](mailto:alessandro.mty@gmail.com), [juan.antonio.rojas@itnl.edu.mx](mailto:juan.antonio.rojas@itnl.edu.mx), [patricia.quintero@itnl.edu.mx](mailto:patricia.quintero@itnl.edu.mx),

[rene.sanjuan@itnl.edu.mx](mailto:rene.sanjuan@itnl.edu.mx), [ernesto.jesus.rincon@itnl.edu.mx](mailto:ernesto.jesus.rincon@itnl.edu.mx)

\*Autor Correspondiente

### RESUMEN

Se presenta el diseño matemático de un sistema de control basado en la función de transferencia en tiempo discreto de una red de agua potable a tamaño escala, con fines de ahorro de la misma y contrarrestando los efectos del desperdicio excesivo de agua por cambios de presión. Se implementa un sistema de control para operación de una red sectorizada, considerando la demanda con mínimo consumo energético. Para ello se simula un control clásico del tipo PI por medio de la herramienta matemática de *Matlab* y *Simulink*, buscando encontrar la forma más efectiva para contrarrestar los cambios de presión que se presente en la red de agua. El controlador evita presiones altas que provocan roturas y fugas en la instalación, efectos por golpe de ariete debido a la operación súbita de los actuadores y efectos adversos como presiones bajas que puedan contaminar el líquido al reestablecerse la presión.

**Palabras Clave:** Diseño de control de presión, gestión de redes de agua, modelo matemático de red.

### ABSTRACT

Is presented the mathematical design of a control system based on the transfer function in discrete time of a drinking water network size scale, with the purpose to save and counteract the effects of excessive water waste by pressure changes. A control system for operating a sectorized network, considering the demand with minimum energy consumption is implemented. A classic PI control was simulated using the mathematical tool of *Matlab* and *Simulink*, finding the most effective way to counter the pressure changes that are present in the water network. The controller prevents high pressures that cause cracks and leaks in the system, water hammer effects due to sudden operation of the actuators and adverse effects such as low pressures that may contaminate the liquid when the pressure is settled.

**Keywords:** Design pressure control, Management of water networks, Network mathematical model.

### 1. INTRODUCCIÓN

El agua es un elemento esencial para la vida humana, pieza clave para el desarrollo social y económico de cualquier país, de gran utilidad tanto en escuelas como hospitales e industrias de ahí su principal importancia y relevancia. Mas sin embargo uno de los principales problemas que existen hoy en día es la conservación y cuidado de este valioso líquido, según un informe de las Naciones Unidas la cantidad que existe en la Tierra alcanza los 1,385 millones de km<sup>3</sup>, sin embargo, menos

del 3% de esta cantidad es agua dulce y de este total apenas el 0.3% es agua superficial [1]. El 70,8% de la superficie terrestre está ocupada por agua, pero tan solo un 2,5% de toda el agua existente en el planeta es agua dulce, o sea, apta para consumo. La mayoría se encuentra inaccesible en glaciares, en los polos, etc., así que tan solo se dispone para consumo el 0,5% que es agua subterránea o superficial. En la Tierra habitan actualmente 6000 millones de personas, de las cuales, cerca del 20% viven en 50 países que carecen de este vital líquido.

Debido al crecimiento demográfico, la urbanización y los efectos del calentamiento global, los recursos hídricos son cada vez más escasos en muchas partes del mundo, datos del Banco Mundial [2]. El agua que se pierde en los sistemas urbanos de distribución ha alcanzado la asombrosa cifra de 32 mil millones de m<sup>3</sup> por año y en México Conagua [3] informa que alrededor del 38% del agua potable se pierde en los sistemas de distribución y que para evitar dichas pérdidas y la contaminación de los acuíferos, resulta fundamental garantizar la hermeticidad de los sistemas, la resistencia y vida útil de los productos o componentes con los que se construyen. Algunas causas son: la corrosión por tensión, el control descentralizado de los equipos actuadores como bombas y válvulas, las tuberías antiguas y pobremente construidas, el mantenimiento pobre del equipo y daños provocados por el golpe de ariete, son algunos de los factores contribuyentes a las fugas [4],[5].

Para lograr un funcionamiento adecuado las redes de agua están equipadas con sistemas de bombeo y válvulas reguladoras de presión que se utilizan para mantener presiones y flujos de agua dentro de márgenes seguros [6]. Hoy en día estos actuadores son controlados de una forma descentralizada tomando en cuenta información local del sistema sin tomar en cuenta información remota del mismo que puede ser de gran ayuda. Es por ello importante el diseño de algún tipo de control que tome en cuenta las variaciones del sistema en tiempo real y remoto. Lo anterior para contrarrestar los efectos negativos de las perturbaciones que pudiesen existir en la red, considerando también el consumo y demanda de los usuarios.

### 2. DESARROLLO

#### 2.1. Construcción de un prototipo basado en una red de distribución de agua

A partir del modelo a escala de una red de distribución de agua del tipo anillo [3], se obtiene la Función de Transferencia (F.T.) en tiempo continuo para realizar el modelo matemático del sistema y el control del mismo.

Aunque por lo general las redes de distribución pueden ser de dos tipos ramificadas o anilladas, o una combinación de ambas. Se decidió la construcción de una red en configuración anillo, debido a que este tipo de redes son hoy en día las más utilizadas, ver figura 1. Siendo sus principales características: la libertad en el sentido de la circulación del agua, mejor repartición de la presión y mayor seguridad en el servicio.

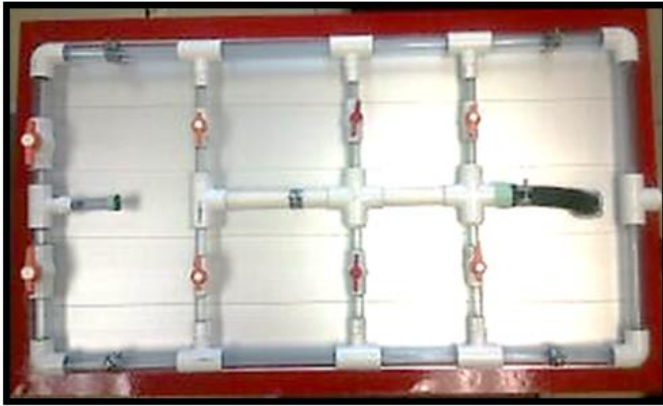


Fig.1. Red de distribución tipo anillo.

La planta está conformada por diferentes elementos, como lo son: la red de distribución dividida en red principal, secundaria y terciaria, estas últimas son tomas domiciliarias, además de un tanque de abastecimiento de 50lts. Sistemas actuadores; hidroneumático y válvula reguladora de presión (VRP), y un sensor de presión encargado de medir la variable de proceso en este caso la presión del sistema. Un esquema del prototipo de la planta se muestra en la figura 2.

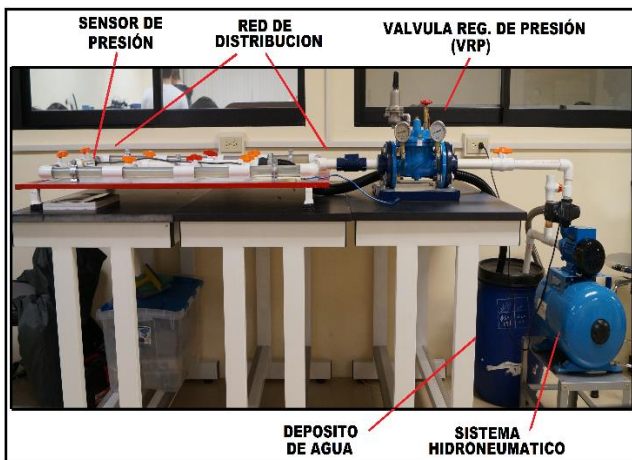


Fig.2. Prototipo de una red de agua.

## 2.2. Modelado matemático

Para modelar el sistema de la red de distribución de agua a escala se obtiene la respuesta a una entrada del tipo escalón, y por medio del programa de instrumentación visual, Lab View, se obtiene la gráfica del comportamiento de la misma respecto a la variable de proceso en este caso presión.

### 2.2.1. Obtención de la respuesta

A partir de la planta mostrada con anterioridad se procedió a obtener su respuesta, y con ello calcular la función de transferencia del sistema en lazo cerrado que representa matemáticamente a la planta. Figura 3.

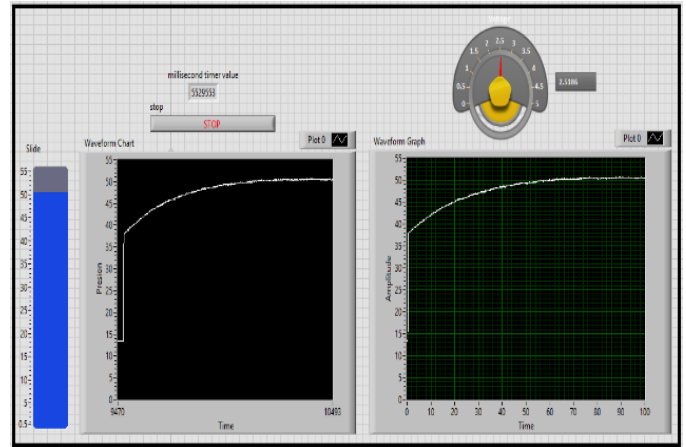


Fig.3. Respuesta del sistema mediante Lab View.

Los datos muestreados por medio del programa son graficados de tal forma que el usuario pueda obtener una mejor comprensión del comportamiento del sistema. Estos datos también pueden ser llevados a programas como Excel o Matlab. Las gráficas se muestran a continuación.



Fig.4. Respuesta del sistema en Excel.

De la figura 4 se observa que el comportamiento de la planta es lineal y de 1<sup>er</sup> orden. Por medio de Matlab se procede a obtener diversas repuestas del sistema y encontrar valores promedio tanto de presión y tiempo de establecimiento. Figura 5.

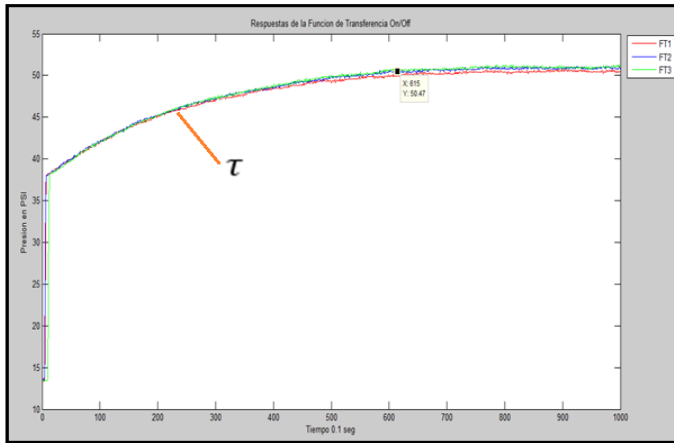
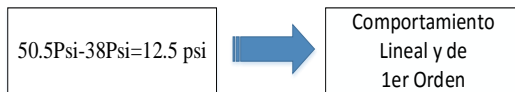


Fig.5. Respuesta del sistema en Excel.

Se observa que la respuesta al inicio tiende a un comportamiento tremendamente lineal, llegando a un valor de 38 psi en 1seg. Posiblemente al uso de una válvula check al inicio de la red, que propicia que la presión y flujo se acumulen. Esta presión de 38 psi se toma como la Presión aplicada al sistema ( $P_s$ ). Tomando solo el comportamiento lineal se hace una diferencia entre la presión aplicada del sistema y la presión de establecimiento  $q_f = 50.5Psi$ .



Siendo 12.5 Psi el rango total en el cual el sistema se comporta linealmente, en este rango se calcula la presión al 63.2% ( $P_{ta}$ ) de su presión estable final. Y por medio de una simple regla de tres se obtiene dicho valor.

Presion	Porcentaje
12.5 Psi	100%
$P_x$	63.2%

$P_x = 7.9 \approx 8.0Psi$

Por lo tanto sumando  $P_x$  a la Presión Aplicada  $P_s$ , obtenemos la presión del sistema al 63.2% ( $P_{ta}$ )

$$P_{ta} = P_s + P_x = 38Psi + 8Psi = 46Psi \quad (1)$$

A partir de los datos obtenidos de las gráficas realizadas se hace la identificación del sistema con la ecuación siguiente:

$$\frac{Q_s}{P_s} = \frac{b}{s+a} \quad (2)$$

Donde:

$Q_s$ =Presión (Psi)

$P_s$ =Presión aplicada (Psi)

Los parámetros se obtienen a partir de las gráficas, obteniendo el valor de  $\tau$  o  $t_a$  tiempo en el cual el sistema hidráulico alcanza el 63.2% de su presión final estable  $q_{final}$ .

Buscando el valor en tablas y tomando que la presión del sistema al 63.2% es:  $P_{ta} = 46Psi$ , se encuentra  $t_{63.2\%} = t_a = 24 seg$ . Con estos datos obtenemos las constantes:

$$a = \frac{1}{t_a} = \frac{1}{24} = 0.041666 \quad (3)$$

$$b = \frac{(a)(q_f)}{P_s} = \frac{(0.04166)(50.5)}{38} = \frac{101}{1824} \quad (4)$$

Por lo tanto la F.T. en lazo cerrado con el sensor de presión integrado queda de la siguiente manera:

$$G(s) = \frac{101/1824}{s+1/24} \quad (5)$$

## 2.2.2. Estabilidad

La estabilidad del sistema se puede determinar considerando como cambia la salida con el tiempo después de una entrada impulso, en un sistema estable la salida tenderá a cero con el tiempo es decir que (converge) y con un sistema inestable la salida crecerá con el tiempo (diverge) [7].

Como se observa la función  $G(s)$  carece de ceros en el numerador y tiene un polo en  $(s+a)$ , esto es un polo en  $s = -1/24$ .

$$G(s) = \frac{b}{s+a} = \frac{101/1824}{s+1/24} \quad (6)$$

La salida  $\theta_o(s)$  esta relacionada con la entrada  $\theta_i(s)$  mediante:

$$\theta_o(s) = \frac{101/1824}{s+1/24} \theta_i(s) \quad (7)$$

Si el sistema está sujeto a un impulso unitario, entonces  $\theta_i(s) = 1$  y de esta manera:

$$\theta_o(s) = \frac{101/1824}{s+1/24}$$

Esta es una transformada de Laplace de la forma  $\frac{1}{s+a}$  y así la transformada inversa resulta:

$$\theta_o = e^{-at} \quad t \geq 0 \quad (8)$$

El valor de  $e^{-at}$  decrece con el tiempo haciéndose cero en un tiempo infinito, por lo tanto el sistema en tiempo continuo es estable. Ver gráfica de la ecuación (8) en figura 4.

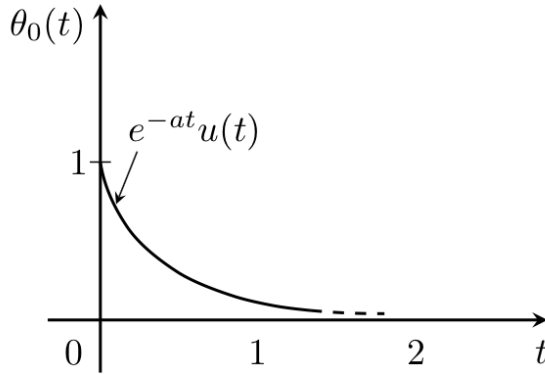


Fig.4. Respuesta del sistema

### 2.2.3. Función de transferencia en tiempo discreto

En este trabajo se aborda el diseño y simulación de un control digital, por lo cual es necesario convertir la función de transferencia de la planta de tiempo continuo  $G(s)$  a tiempo discreto  $G(z)$  para que el controlador a diseñar entienda los datos muestreados y controle de manera adecuada la variable de proceso [8]. Para ello se utiliza un retenedor de orden cero, representado a continuación.

$$G_{roc}(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s} \quad (9)$$

El producto tanto de la función de la planta  $G(s)$  y el retenedor  $G_{roc}(s)$  representa la función de transferencia de lazo directo.

$$G_{roc}G_z = \left\{ \frac{1-e^{-st}}{s} \cdot \frac{b}{s+a} \right\} \quad (10)$$

Y tomando en cuenta que  $e^{-sT} = z^{-1}$

$$G_{roc}G_z = Z \left\{ \frac{b}{s(s+a)} \right\} (1-z^{-1})$$

Expandiendo en fracciones parciales el término en  $s$  y considerando un Tiempo de Muestreo de  $T=1$ seg. Obtenemos la función en tiempo discreto.

$$G(z) = \frac{5.525760e^{-3}}{z - 0.995842} \quad (11)$$

### 2.3. Control PI

Es necesario la aplicación de un control del tipo PI, requiriendo corregir el error de una manera pautada y descartando la acción derivativa, ya que una acción veloz por parte del elemento final de control (VRP) podría repercutir en daños en el sistema como el denominado golpe de ariete [9], que es ocasionado por un cierre abrupto de la válvula, produciendo un daño rotundo a la tubería.

#### 2.3.1 Diseño de control PI

A continuación se expone el procedimiento de diseño de un control PI y con  $T=0.1$  seg.

La F.T. en lazo abierto sin compensar es de tipo cero, dado que no existen polos en el origen y se establece a continuación.

$$G_{roc}G_p(z) = (1-z^{-1})Z \left\{ \frac{101/1824}{s+1/24} \right\} \quad (12)$$

$$G_{roc}G_p(z) = \frac{5.525760 \times 10^{-3}}{z - 0.995842}$$

Siendo el sistema de tipo cero, el error en estado estacionario debido a una entrada escalón no es cero, por lo que la constante de error de posición se calcula como:

$$K'_p = \lim_{z \rightarrow 1} G_{roc}G_p(z) \quad (13)$$

$$K'_p = 1.328947$$

Para una entrada escalón unitario, el error de estado estacionario  $e_{ss} = \frac{1}{1+K'_p} = 0.42937$ .

Siguiendo con el diseño del PI como se propone en [10], se establecen los siguientes requisitos de diseño para que el sistema alcance el valor deseado.

- 1) La constante de error de velocidad o rampa debe ser mayor igual que 5, esto es;  $K'_v \geq 5$ .
- 2) Máximo sobretiro  $c(t)_{max} \leq 5\%$ .
- 3) El tiempo de pico  $T_{max}$  en el cual ocurre  $c(t)_{max}$  debe ser menor o igual a 5seg.

Para eliminar el error de estado estacionario cuando la entrada es un escalón unitario, es necesario la acción integral para cambiar el sistema de tipo cero a tipo uno. Aplicando el controlador PI con un esquema de integración atrasado [8], dado por:

$$D(z) = \frac{K_p z - (K_p - K_I T)}{z - 1} \quad (14)$$

La F.T. en lazo abierto incluyendo el controlador PI se convierte en:

$$D(z)G_{roc}G_p(z) = \frac{5.525760 \times 10^{-3} [K_p z - (K_p - K_I T)]}{(z - 0.995842)(z - 1)} \quad (15)$$

Aplicando ahora el requerimiento en  $K'_v \geq 5$  y dado  $K_p = 1.328947$  se tiene que:

$$K'_I = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) D(z) G_{roc} G_p(z) \quad (16)$$

$$10 \left( \frac{552.576 \times 10^{-6} K_I}{4.157998^{-3}} \right) = 1.328947 K_I$$

Por lo tanto:  $K'_p = 1.328947 K_I \geq 5$  (17)

Se obtiene:  $K_I = 3.762376$  (18)

### 2.3.2 Ecuación característica

Los efectos de la constante proporcional  $K_p$  en el desempeño del sistema pueden ser investigados utilizando el método del lugar de las raíces, para ello se utiliza la ecuación característica del sistema compensado, partiendo de  $D(z)G_{roc}G_p(z)$  y dado  $K_I$  y  $T = 0.1s$ . La ecuación característica resulta:

$$(z - 0.995842)(z - 1) + 5.525760 \times 10^{-3} K_p (z - 1) + 2.078999^{-3} = 0 \quad (19)$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación por los términos que no contienen  $K_p$  se tiene:

$$1 + G_{eq}(z) = 0 \quad (20)$$

$$1 + \frac{5.525760 \times 10^{-3} K_p (z - 1)}{(z - 0.995842)(z - 1) + 2.078999} = 0$$

El polinomio del denominador del término racional se puede factorizar como:

$$(z - 0.54979 - 0.83387i)(z - 0.54979 + 0.83387i) \quad (21)$$

### 2.3.3 Lugar de las raíces para sistemas digitales

La región de inestabilidad en el plano S, existe cuando los polos en lazo cerrado se encuentran en el semiplano derecho, mientras que en el plano Z los polos en lazo cerrado que se encuentran fuera del círculo unitario son polos inestables [11]. Partiendo de la ecuación característica  $1 + G_{eq}(z)$ , se define la expresión para la obtención de la constante proporcional.

$$K_p = \frac{K_e}{5.525760 \times 10^{-3}} \quad (22)$$

Donde:

$K_e$  = Ganancia del sistema en el plano Z

### 2.3.4 Interpretación del lugar de las raíces.

En el plano Z se puede observar que el sistema en lazo cerrado con el controlador PI y  $K_I = 3.8$  solo es estable para un cierto rango de valores de  $K_p$ , como se observa en la figura 6.

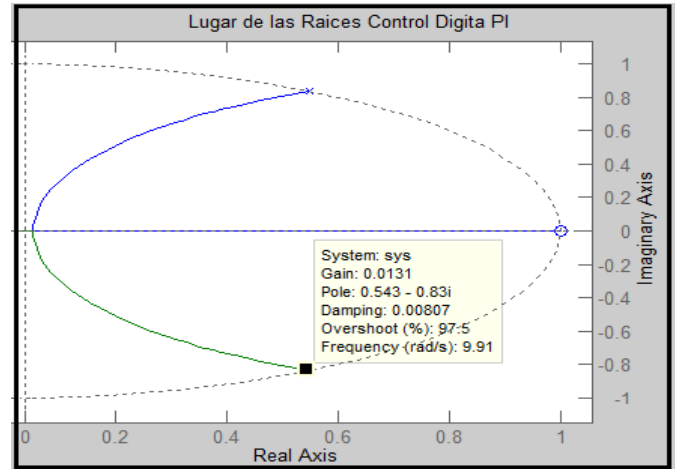


Fig.6. Lugar de las Raíces en el Plano Z.

Por lo tanto  $K_p$  debe estar en el siguiente rango:

$$1.809705 < K_p < 271.455837$$

Fuera de estos valores el sistema es inestable, observándose las siguientes raíces o polos.

$$K_p \approx 1.809705 \rightarrow 0.543 - 0.83i$$

$$K_p \approx 271.455837 \rightarrow -1$$

Observándose que solo existe una raíz de cruce en el círculo unitario en  $K_p = 271.465837$

### 2.4. Diseño del algoritmo de control PI

La siguiente ecuación representa el algoritmo de control PI para el proceso en transformada Z, [12].

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} \quad (23)$$

Donde:

$M(z)$  = Transformada Z de la salida del controlador.

$E(z)$  = Transformada Z del error  $[R(z) - C(z)]$ .

Dado  $D(z)$  y escogiendo dentro del círculo unitario una ganancia  $K_e = 0.1$

$$K_p = \frac{K_e}{5.525760 \times 10^{-3}} = 18.097055 \quad (24)$$

Por lo cual el algoritmo de control  $D(z)$ , siendo  $K_p = 18.09755$  y  $K_I \approx 3.762376$ , nos queda:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{9.219128125z - 5.456751887}{z - 1} \quad (25)$$

Agrupando términos y despejando la transformada Z de la salida del controlador  $M(z)$ :



$$M(z) = M(z)z^{-1} + 18.0970E(z) - 17.7208E(z)z^{-1} \quad (26)$$

Considerando que  $z^{-1}$  constituye un retardo de un tiempo de muestreo, la expresión anterior puede ser invertida de tal forma que represente la ecuación de un algoritmo para el cálculo de la salida del control digital,  $M_n$ , por lo tanto.

$$M_n = M_{n-1} + 18.0970E_n - 17.7208E_{n-1} \quad (27)$$

Donde:

$n$  denota el  $n$ -ésimo valor (valor actual) y  $(n-1)$  el  $(n-1)$ -ésimo instante de muestreo.

La ecuación anterior puede ser implementada en forma de algoritmo sistemático en algún sistema computacional, plataforma digital, etc.

#### 2.4.1. Simulación del control PI en Matlab (Simulink)

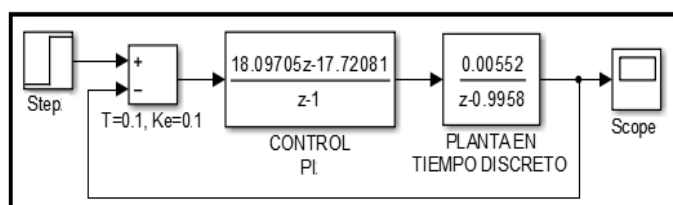


Fig.7. Simulación del controlador PI en Simulink.

A continuación se muestra la respuesta final del controlador PI, tomando en cuenta las funciones de transferencia  $G(s)$ ,  $G(z)$  y el control  $PI(D(Z))$ , por medio de Simulink de Matlab.

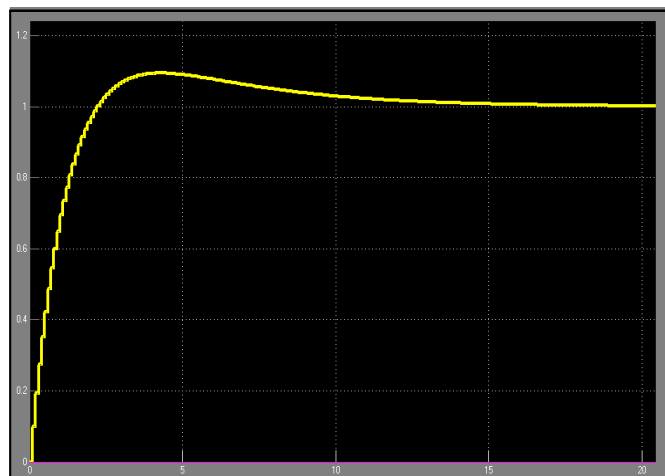


Fig.7. Respuesta a una entrada escalón del sistema con el controlador PI.

### 3. CONCLUSIONES

Realizando diversas pruebas de simulación se observa como la respuesta del sistema hidráulico muestra estabilidad al bajar el tiempo de muestreo ( $T$ ), elevando este valor por encima de 1seg repercute en la salida de los polos del círculo unitario mostrando inestabilidad en el sistema.

Por otra parte al variar la ganancia proporcional  $K_p$  menor a 0.1 el sistema responde con una respuesta transitoria oscilante (subamortiguada), mientras que una ganancia arriba de 1 la respuesta es rápida y estable (críticamente amortiguada). Escogiendo un valor de  $K_p = 0.1$  el sistema responde de acuerdo a la figura 7, con un tiempo de establecimiento amplio precisamente buscado para que el reaccionar de los actuadores sea paulatino, minimizando el efecto por Golpe de Ariete, además de obtener una adecuada presión en el sistema y un control adecuado de la misma.

### 4. REFERENCIAS

- [1] Sitio oficial de las Naciones Unidas ONU: Informe sobre el desarrollo de los recursos hídricos en el mundo, disponible: <http://www.un.org>, sitio visitado: Octubre 24, 2013.
- [2] Organismo especializado de las Naciones Unidas: Documentos e informes, disponible: <http://documentos.bancomundial.org>, sitio visitado: Octubre 22, 2013.
- [3] Comisión nacional del agua: Marco normativo y sistemas de información, disponible en: <http://www.cna.gob.mx/> sitio visitado: Nov 15, 2013.
- [4] Nicolini, M. "Optimal pressure management in water networks: increased efficiency and reduced energy costs", in Defense Science Research Conference and Expo (DSR), Singapore, 2011, pp. 1 - 4.
- [5] Nicolini, M. "Model Calibration and System Simulation from Real Time Monitoring of Water Distribution Networks", in Computer Research and Development (ICCRD), Shanghai, 2011, pp. 51 - 55.
- [6] S. Leirens, C. Zamora, R.R. Negenborn, and B. De Schutter. "Coordination in urban water supply networks using distributed model predictive control". In American Control Conference (ACC), Baltimore, MD, 2010, pp. 3957 - 3962.
- [7] W. Bolton, Ingeniería de Control. 2da ed. Mexico D.F. Alfaomega, 2001.
- [8] K.Ogata, Sistemas de Control en Tiempo Discreto. 2da ed. México D.F. Prentice Hall, 1996.
- [9] Robert I. mott, Mecánica de fluidos aplicada. 4ta ed. México D.F. Prentice Hall, 1996.
- [10] Benjamin C. Kuo, Sistemas de Control Automatico. 7ma ed. México D.F. Continental, 1997.
- [11] Oscar Reinoso, Control de Sistemas Discretos, 1ra ed, McGraw-Hill, Madrid, Esp. 2004.
- [12] Pradeep B. Deshpande, Computer Process Control, 1ra. ed, Prentice Hall, North Carolina, U.E, 1983.