Congr. Int. en Ing. Electrónica. Mem. ELECTRO, Vol. 39, pp. 248-252, Oct 2017, Chihuahua, Chih. México
http://electro.itchihuahua.edu.mx/memorias_electro/MemoriaElectro2017.zip
ISSN 1405-2172

APLICACIÓN DE LOS COSENOS DIRECTORES PARA LA VERIFICACIÓN DEL CÁLCULO DE LOS VALORES DE EV, AV Y PV EN UN ESTUDIO DE R&R.

Guerrero Chávez, Luis Arnulfo,
María Elena Delgado Portillo,
Pedro Sánchez Santiago,
Alfredo Burciaga García
Instituto Tecnológico de Chihuahua
División de Estudios de Posgrado e Investigación
Av. Tecnológico 2909. Chihuahua, Chihuahua, México. CP 31310.
Tel. (614) 2 01 20 00 ext. 112.
lguerrer@itch.edu.mx
medelgado@itchihuahua.edu.mx
sanchezsantiago.pedro@gmail.com
aburciag@itchihuahua.edu.mx

Escobedo Portillo, Alberto
Universidad La Salle Chihuahua
Posgrado e Investigación
Prol. Loma de Majalca 11201. Chihuahua, Chihuahua, México. CP 31020.
Tel. (614) 4 32 14 64 ext. 3802
aescobedo@ulsachihuahua.edu.mx

RESUMEN.

El Manual para el Análisis del Sistema de Medición de Chrysler, Ford y General Motors, y la Norma ASTM E2782, muestran un método para calcular la Repetitividad y Reproducibilidad de instrumentos de medición, usando la Variación del Instrumento (EV), del Observador (AV), de la Parte (PV) y la Variación Total /TV). Basan sus cálculos en los porcentajes de cada variación individual, con respecto a la Variación Total; sin embargo, ambos organismos establecen que la adición de las contribuciones, no sumarán 100%, y no proporcionan una forma de verificarlos. Revisando la expresión para calcular TV, se concluye que es una resultante y por lo tanto EV/TV, AV/TV y PV/TV son sus cosenos. El presente trabajo demuestra que elevando las proporciones, es decir sus cosenos, al cuadrado y sumándolas, el resultado es igual a uno, por lo que se propone como un procedimiento útil, sencillo y certero de verificación.

PALABRAS CLAVE: Análisis de Sistema de Medición, Variación del Equipo, Variación del Observador, Variación de la Parte, Variación Total, Cosenos Directores.

ABSTRACT.

The Measuring System Analysis Manual of Chrysler, Ford and General Motors and the ASTM Norm E2782 show a method to calculate Repeatability and Reproducibility (R&R) of measuring instruments, based on Equipment Variation (EV), Appraiser Variation (AV), Part Variation (PV) and Total Variation (TV). Their calculations are based on each individual's percentages respect Total Variation; however, both entities establish that the sum percent consumed by each factor will not be equal 100%, and do not provide a way to verify the calculus accuracy. Reviewing the formula, TV is a resultant, and therefore, EV/TV, AV/TV and PV/TV are its cosines directors. The present article demonstrates that calculating the square of each proportion, or rather its cosines directors and adding them, the result will be equal to one, as far as this method is proposed as a accurate, easy and useful verification procedure.

KEYWORDS: Measurement System Analysis, Equipment Variation, Appraiser Variation, Part Variation, Total Variation, Cosines Directors.

1. INTRODUCCIÓN

Calidad es un término que ha dejado de ser una ventaja competitiva, para convertirse en un requerimiento, que si no se cumple, puede provocar la pérdida de mercado. La necesidad de contar con sistemas de medición confiables, que se utilizan en la industria manufacturera, que corresponden a la mayor parte de las empresas localizadas en la ciudad de Chihuahua, para tomar las decisiones que afectan la calidad de los productos que envían a sus clientes a diferentes partes del mundo, es prioritaria [1].

El Análisis del Sistema de Medición (MSA), desarrollado por Chrysler, Ford y General Motors en 1990, es una metodología conformada por múltiples herramientas estadísticas estructuradas para analizar los sistemas de edición y su inherente variación. Su primer antecedente proviene de un artículo escrito por R. W. Traver [2], de la General Electric. El concepto fue extendido por Jim McCaslin y Gregory Gruska [3], para aplicarlo a estudios por atributos y curvas de desempeño de los estudios. Esas técnicas fueron consolidadas y editadas por Bill Wiechec en 1978 y publicadas posteriormente por la Chevrolet como Análisis del Sistemas de Medición.

El estudio de un Sistema de Medición (R&R), que es medida de su capacidad, permite identificar las variaciones en el

equipo de medición (EV) conocida como Repetitividad (variación en las mediciones obtenidas con un instrumento, por un solo observador, cuando se usa varias veces mientras evalúa la misma característica), de la persona que utiliza en equipo (AV) denominada Reproducibilidad (variación en el promedio de las mediciones realizadas por diferentes observadores, usando el mismo instrumento, mientras verifica una característica en una parte) y de la parte o del material que se evalúa (PV) [4].

El Subcomité E11.20 de la Sociedad Americana para Pruebas y Materiales (ASTM) desarrolló en 2016 la Norma E2782, relacionada con la calidad y las estadísticas, sobre la evaluación del Método de Prueba y Control de Calidad [5] para ser aplicado en la industria en general.

El MSA y la ASTM establecen que *"la suma de los porcentajes consumidos por cada factor no serán igual al 100%"* [5][6], pero no proporcionan una manera para asegurar la veracidad de los cálculos de EV, AV, R&R y PV.

El presente trabajo tiene como objetivo proponer un método que sirva para verificar los cálculos de las variaciones, basado en los cosenos para los sistemas que forman EV, AV y la resultante R&R, así como EV, AV, PV y su resultante TV.

2. DESARROLLO.

La tabla 1 muestra las expresiones y las constantes que utiliza la Norma E2782 de la ASTM, para calcular EV, AV, R&R, PV y TV (realizados del lado izquierdo), y posteriormente determinar sus contribuciones: %EV, el %AV, %R&R y %PV (del lado derecho de la tabla).

2.1. Toma de datos para el cálculo de la Repetitividad y Reproducibilidad.

Tres observadores o tasadores miden 10 piezas o partes, 3 veces cada pieza y con los datos recolectados se calculan las medias y rangos de esas lecturas.

2.2. Cálculo de Promedio de los Rangos (R).

El promedio de todos los rangos, se calcula:

R = (Ra + Rb + Rc) /3.
R = 0.3417

Donde Ra, Rb y Rc son los rangos calculados de las lecturas realizadas por los 3 tasadores.

2.3. Cálculo de loa diferencia de las medias (X_{dif}).

Se obtienen las medias de la lecturas tomadas por los 3 tasadores Xa, Xb y Xc, sumando los datos y dividiendo la suma entre las 10 lecturas. La diferencia de las medias se determina restando a la media máxima, la media mínima:

$X_{dif} = X_{max} - X_{min}$
$X_{dif} = 0.4446$

Tabla 1. Repetitividad medida y reporte de reproducibilidad [5]

Repetitividad de medida y reporte de reproducibilidad		
No. de parte y nombre:	Nombre de medida:	Fecha:
Características:	Medida No.:	Realizado por:
Especificaciones:	Tipo de medida:	
De hoja de datos: R=0.3417	X_{Dif}=0.4446	R_p=3.511
Anàlisis de unidad de medición		**% de variación total (TV)**

Repetitividad: Variación de Equipo (EV)

$EV = R * K_1$

*EV = 0.3417 * 0.5908*
EV = 0.20188

Pruebas	K_1
2	0.8862
3	0.5908

$\%EV = 100(EV/TV)$
=100(0.20188/1.14610)
= 17.62%

Reproducibilidad : Variación del Observador (AV)

$AV = \sqrt{(X_{Dif} * K_2)^2 - (EV^2/(nr))}$

$= \sqrt{(0.4446 * 0.5231)^2 - (0.20188^2/(10 * 3))}$

= 0.22963

n = partes r = pruebas

Tasador	2	3
K_3	0.7071	0.5231

$\%AV = 100(AV/TV)$
= 100(0.22963/1.14610)
= 20.04%

Repetitividad y reproducibilidad (R&R)

$R\&R = \sqrt{EV^2 + AV^2}$
$= \sqrt{0.20188^2 + 0.22963^2}$
= 0.30575

$\%R\&R = 100(R\&R/TV)$
= 100(0.30575/1.14610)
= 26.68%

Variación de parte (PV)

$PV = R_p * K_3$
= 1.10486

Parte	K_3	Parte	K_3	Parte	K_3
2	0.7071	5	0.4030	8	0.3375
3	0.5231	6	0.3742	9	0.3349
4	0.4467	7	0.3534	10	0.3146

$\%PV = 100(PV/TV)$
= 100(1.10486/1.14610)
= 96.38%

Variación Totat (TV)

$TV = \sqrt{R\&R^2 + PV^2}$
$= \sqrt{0.30575^2 + 1.10456^2}$
= 1.14610

2.4. Cálculo del rango del promedio de las partes (R_p).

Se determinan los promedios de cada parte que obtuvo cada tasador:

$X_{p1} = (X_{1a} + X_{1b} + X_{1c}) / 3$

Luego se localizan los valores máximo y mínimo de los 10 promedios, se restan, y ese es el valor del rango de los promedios R_p:

$R_p = 3.511$

2.5. Cálculo de la Repetividad EV.

Si el promedio de todos los rangos vale R = 0.3417 y la cantidad de mediciones por cada pieza son 3, entonces el coeficiente $K_1 = 0.5906$, de acuerdo a la tabla 2.

Tabla 2. Determinación del coeficiente K_1 [5]

Observaciones	K_1
2	0.8862
3	0.5906

Entonces VE = (0.3417) (0.5906) = 0.20188

2.6. Cálculo de la Reproducibilidad AV.

Como la diferencia de las medias X_{Diif} = 0.4446, el número de piezas medidas n = 10, el número de observaciones r = 3, y para 3 observadores, de acuerdo a la tabla 3, el coeficiente K_2 = 5231:

Tabla 3. Determinación del coeficiente K_2 [5]

Observadores	2	3
K_2	0.7071	0.5231

Por lo tanto

$$AV = \sqrt{(X_{Dif} * K_2)^2 - (EV^2/nr)}$$

$$AV = \sqrt{(0.4446 * 0.5231)^2 - \left(\frac{0.20188^2}{10 * 3}\right)} = 0.22963$$

2.7. Cálculo del R&R.

Calculando el valor de la Repetitividad y Reproducibilidad (R&R) se tiene que:

$$R\&R = \sqrt{EV^2 + AV^2}$$

$$R\&R = \sqrt{0.20188^2 + 0.22963^2} = 0.30575$$

2.8. Cálculo de la variación de la parte PV.

Si el rango del promedio de las partes R_p = 3.511 y si se miden 10 partes, entonces de la tabla 4, K_3 = 0.3146:

Tabla 3. Valores del Coeficiente K3 [5]

Partes	K_3	Partes	K_3	Partes	K_3
2	0.7072	**5**	0.4030	**8**	0.3375
3	05231	**6**	0.3742	**9**	0.3240
4	0.4467	**7**	0.3534	**10**	0.3146

entonces:

$$PV = R_p * K_3$$

$$PV = 3.511 * 0{,}3146 = 1.10456$$

2.9. Calculo de la variación total TV.

Calculando la variación total TV:

$$TV = \sqrt{R\&R^2 + PV^2}$$

o bien,

$$TV = \sqrt{EV^2 + AV^2 + PV^2}$$

$$TV = \sqrt{0.20188^2 + 0.22963^2 + 1.10456^2} = 1.14610$$

2.10. Calculo de las contribuciones de EV, AV y PV a la variación total TV.

Las contribuciones de EV, AV y PV con respecto a TV son:

$$\%EV = \left(\frac{EV}{TV}\right) * 100 = \left(\frac{0.20188}{1.14810}\right) * 100 = 17.58\%$$

$$\%AV = \left(\frac{AV}{TV}\right) * 100 = \left(\frac{0.22963}{1.14610}\right) * 100 = 20.04\%$$

$$\%PV = \left(\frac{PV}{TV}\right) * 100 = \left(\frac{1.10456}{1.14610}\right) * 100 = 96.38\%$$

2.11. Calculo de las contribuciones de EV y AV con respecto a la repetitividad y reproducibilidad R&R.

Por otro lado, aunque no se presenta en el Manual MSA ni en la Norma E2872-11e1 de la ASTM,, las contribuciones de EV y AV con respecto a la repetitividad y reproducibilidad R&R son:

$$\%EV_{R\&R} = \left(\frac{EV}{R\&R}\right) * 100 = \left(\frac{0.20186}{0.30575}\right) * 100 = 66.03\%$$

$$\%AV_{R\&R} = \left(\frac{AV}{R\&R}\right) * 100 = \left(\frac{0.22963}{0.30575}\right) * 100 = 75.10\%$$

2.12. Los Cosenos Directores [7].

Si se definen α, β y λ como los ángulos que forman una recta con sus componentes positivas sobre los ejes coordenados, los cosenos de esos ángulos, cos α, cos β y cos λ, se denominan como los cosenos directores de dicha recta (figura 1).

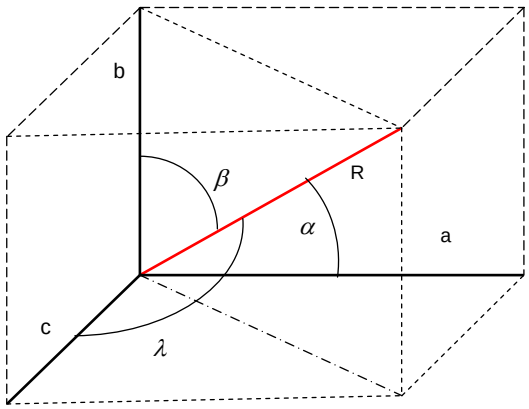

Figura 1. Los Cosenos Directores de una recta [7]

Los Cosenos Directores se calculan dividiendo las amplitudes de las proyecciones de la recta, entre la magnitud de la recta:

$$Cos\ \alpha = \frac{a}{R}$$

$$Cos\,\beta = \frac{b}{R}$$

$$Cos\,\lambda = \frac{c}{R}$$

Como la recta R es la resultante de la magnitud de sus proyecciones:

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

O sea que:

$$Cos\,\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$Cos\,\beta = \frac{b}{\sqrt{c^2 + b^2 + c^2}}$$

$$Cos\,\lambda = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Si se elevan al cuadrado las ecuaciones anteriores y se suman, se tiene que:

$$Cos^2\alpha + Cos^2\beta + Cos^2\lambda = 1$$

Es decir, que la suma de los cuadrados de los Cosenos Directores de una recta es igual a la unidad, lo que significa que los Cosenos Directores de una recta no son cantidades independientes.

2.13. Calculo de las contribuciones de EV, AV y PV a la variación total TV.

$$\%EV = \left(\frac{EV}{TV}\right) * 100 = \left(\frac{0.20188}{1.14810}\right) * 100 = 17.58\%$$

$$\%AV = \left(\frac{AV}{TV}\right) * 100 = \left(\frac{0.22963}{1.14610}\right) * 100 = 20.04\%$$

$$\%PV = \left(\frac{PV}{TV}\right) * 100 = \left(\frac{1.10456}{1.14610}\right) * 100 = 96.38\%$$

Donde *%EV+%AV*%PV*= 17.58%+20.04%+96.38% = 134%

Por otro lado, aunque no se presenta en el MSA:

$$\%EV_{R\&R} = \left(\frac{EV}{R\&R}\right) * 100 = \left(\frac{0.20186}{0.30575}\right) * 100 = 66.03\%$$

$$\%AV_{R\&R} = \left(\frac{AV}{R\&R}\right) * 100 = \left(\frac{0.22963}{0.30575}\right) * 100 = 75.10\%$$

Donde *%EV/R&R+%AV/R&R* = 66.03%+75.10% = 141.13%

3. RESULTADOS.

3.1. Interpretación del significado gráfico de EV, AV y R&R.

Al establecer el MSA que el R&R equivale a la raíz cuadrada del cuadrado de EV y AV, está calculando la resultante de un triángulo rectángulo, representado en la figura 2:

$$R\&R = \sqrt{EV^2 + AV^2}$$

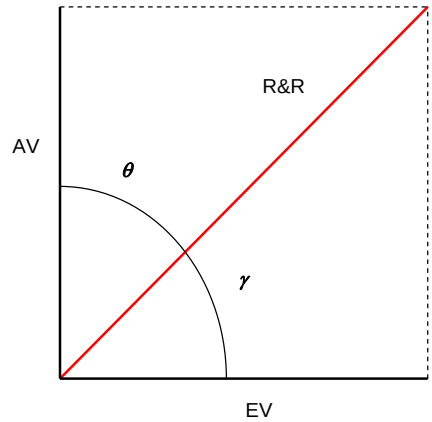

Figura 2. Representación gráfica del R&R.

es posible entonces aplicar la fórmula de los Cosenos Directores:

$$Cos^2\theta + Cos^2\gamma = 1$$

Si los Cosenos de los ángulos θ y γ en la figura 2, están definidos por:

$$Cos\,\theta = \frac{EV}{R\&R}$$

$$Cos\,\gamma = \frac{AV}{R\&R}$$

Entonces,

$$\left(\frac{EV}{R\&R}\right)^2 + \left(\frac{AV}{R\&R}\right)^2 = 1$$

3.2. Interpretación del significado gráfico de EV, AV, PV y TV.

Al igual que en el cálculo de R&R, la variación total es la resultante de un prisma rectangular, mostrado en la figura 3:

$$TV = \sqrt{R\&R^2 + PV^2}$$

o bien,

$$TV = \sqrt{EV^2 + AV^2 + PV^2}$$

Es posible aplicar los Cosenos Directores, por lo que:

$$Cos^2\alpha + Cos^2\beta + Cos^2\lambda = 1$$

Si:

$$Cos\,\alpha = \frac{EV}{TV}$$

$$Cos\,\beta = \frac{AV}{TV}$$

$$Cos\,\lambda = \frac{PV}{TV}$$

entonces:

$$\left(\frac{EV}{TV}\right)^2 + \left(\frac{AV}{TV}\right)^2 + \left(\frac{PV}{TV}\right)^2 = 1$$

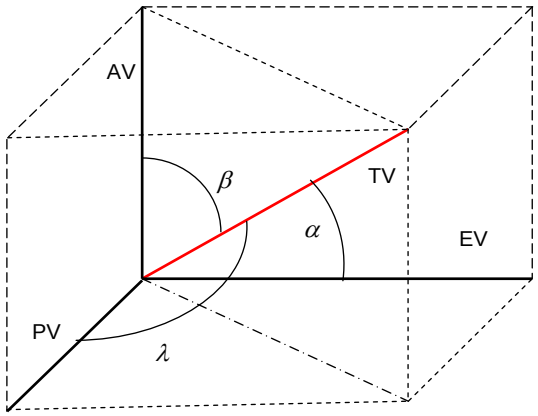

Figura 3. Representación gráfica de la variación total TV.

3.3. Comprobación del cálculo de EV y AV, en función del R&R.

Tomando primero los valores de EV, AV y su resultante R&R mostrados en la tabla 1, y representados en la figura 2, que forman un triángulo rectángulo y aplicando la función Coseno para determinar los ángulos θ y γ:

Si:

$$Cos^2\theta + Cos^2\gamma = 1$$

$$\left(\frac{EV}{R\&R}\right)^2 + \left(\frac{AV}{R\&R}\right)^2 = 1$$

Y si:

$$\frac{EV}{R\&R} = \frac{0.20188}{0{,}30575} = 0.66028$$

$$\frac{AV}{R\&R} = \frac{0.22963}{0{,}30575} = 0.75104$$

Por lo tanto:

$(0.66028)^2 + (0.75104)^2 = 1$

3.4. Comprobación del cálculo de EV, AV y PV en función de TV.

Utilizando los valores de EV, AV, PV y su resultante TV, también mostrados en la tabla 1, representados en la figura 3, que forman un prisma rectangular y aplicando la función Coseno para determinar los ángulos α, β y λ:

Si:

$$Cos^2\alpha + Cos^2\beta + Cos^2\lambda = 1$$

$$\left(\frac{EV}{TV}\right)^2 + \left(\frac{AV}{TV}\right)^2 + \left(\frac{PV}{TV}\right)^2 = 1$$

y si:

$$\frac{EV}{TV} = \frac{0.20188}{1.14610} = 0.17615$$

$$\frac{AV}{TV} = \frac{0.22863}{1.14610} = 0.19949$$

$$\frac{PV}{TV} = \frac{1.10456}{1.14610} = 0.96376$$

Por lo que:

$(0.17615)^2 + (0.19949)^2 + (0.96376)^2 = 1$

$0.03103 + 0.039796 + 0.92883 = 1$

4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

Aunque el Manual MSA de Chrysler, Ford y General Motors, y la Norma E2872-11e1 de la ASTM advierten que "La suma de los porcentajes consumidos por cada factor no serán igual al 100%", no proporcionan una manera de comprobar la veracidad de los cálculos de %EV, %AV, %PV y por consecuencia, de %R&R.

Se comprobó que:

$$\left(\frac{EV}{R\&R}\right)^2 + \left(\frac{AV}{R\&R}\right)^2 = 1$$

y que:

$$\left(\frac{EV}{TV}\right)^2 + \left(\frac{AV}{TV}\right)^2 + \left(\frac{PV}{TV}\right)^2 = 1$$

Por lo que es posible usar los Cosenos Directores como un método de comprobación de los cálculos de las contribuciones de EV, AV y PV.

Se recomienda incluir este procedimiento en el Manual MSA y la Norma E2872-11e1

5. REFERENCIAS.

[1] Ermer, Donald S. (2006). MEASURE FOR MEASURE Quality Progress encontrado en: http://asq.org/quality-progress/2006/03/measure-for-measure/improved-gage-rr-measurement-studies.html

[2] Traver, R.W., (1962). "Measuring Equipment Repeatibility – The Rubber Rule" ASQC Convention Transactions, pp. 25 – 32.

[3] McCaslin, J.A., and Gruska, G. F. (1976). "Analysis of Attribute Gage Systems". ASQC Technical Conference Transactions, pp. 392 – 399.

[4] Chrysler Group LLC, Ford Motor Corporation y General Motors Corporation (2010). Measurement System Analysis (MSA). Automotive Industry Action Group (AIAG), pp. 7.

[5] ASTM (2016). Norma E2782-11e1. Measurement System Analysis (MSA), pp. 101, 103

[6] Chrysler Group LLC, Ford Motor Corporation y General Motors Corporation (2010). Measurement System Analysis (MSA). Automotive Industry Action Group (AIAG), pp. 119 y 122

[7] Woods, F. S. y Bailey, F. H. (1963). Geometría Analítica y Cálculo Infinitesimal. UTHEA, pp. 327.