Congr. Int. en Ing. Electrónica. Mem. ELECTRO, Vol. 39, pp. 253-258, Oct 2017, Chihuahua, Chih. México
http://electro.itchihuahua.edu.mx/memorias_electro/MemoriaElectro2017.zip
ISSN 1405-2172

MICRO ALGORITMO GENÉTICO CON CODIFICACIÓN REAL PARA LA OPTIMIZACIÓN DE UN PORTAFOLIO DE INVERSIÓN

García Mejía Juan Fernando, Pérez Martínez José Arturo, Granda Gutiérrez Everardo Efren, Torres Reyes Carlos Eduardo, Martínez Garduño Yenit
Universidad Autónoma del Estado de México
Centro Universitario UAEM Atlacomulco
Carretera Toluca Atlacomulco Km60 Atlacomulco de Fabela Estado de México
Tel., 7121220446
e-mail fgarciam@uaemex.mx
ÁREA: Computación

RESUMEN.

Un portafolio de inversión se define como una colección de instrumentos bursátiles, en los cuales entidades físicas o morales realizan una determinada inversión. El porcentaje de esta se define en este artículo por medio de algoritmos evolutivos, en específico se realizó una comparativa entre dos tipos de algoritmos genéticos codificados con números reales. Usando como caso de estudio acciones de la Bolsa Mexicana de Valores se demuestra que la opción con mejor estabilidad es constituida por medio de un micro algoritmo genético, el cual reporta una repetitividad mayor con menor costo computacional en relación a un algoritmo genético canónico.
Palabras Clave: Algoritmos Evolutivos, Micro Algoritmo Genético, Optimización

ABSTRACT.

An investment portfolio is defined as a collection of stock exchange instruments, in which physical or moral entities make a certain investment. The percentage of this is defined in this article through evolutionary algorithms, specifically a comparison between two types of genetic algorithms coded with real numbers was made. Using as a case of study actions of the Mexican Stock Exchange it is proved that the option with better stability is constituted by means of a micro genetic algorithm, which reports a greater repeatability with lower computational cost in relation to a canonical genetic algorithm.
Keywords: Evolutionary Algorithms, Micro Genetic Algorithm, Optimization

1. INTRODUCCIÓN

Un portafolio de inversión es una colección de instrumentos bursátiles que representan los activos de una empresa, que cotiza en una o varias bolsas de valores. En ellos una persona, ya sea moral o física decide invertir con la finalidad de obtener máximas ganancias con el menor riesgo posible. Este propósito es objeto de estudio de varias posturas teóricas, la primera y más popular es el modelo de Media-Varianza desarrollado por el economista norteamericano Harry M Markowitz en 1952 publicado en el artículo "Portfolio Selection" en la revista Journal of Finance [1].

El modelo Media-Varianza propuesto por Markowitz se puede representar de forma matemática de acuerdo con las expresiones (1-3). A partir de estas es posible definir que un portafolio de inversión óptimo es aquel que tiene un mínimo riesgo, para un retorno determinado o, equivalentemente un portafolio con un máximo retorno para un nivel de riesgo dado [2].

$$Ganacia = \sum_{i=1}^{n} R_i\, W_i \tag{1}$$

$$Riesgo = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\, W_i W_j \tag{2}$$

$$Sujeto\ a \sum_{i=1}^{n} W_i = 1\ \ W_i \geq 0 \tag{3}$$

Dónde:
$i, j \in \mathbb{Z}$ son los índices de la acción con valores 1,2, 3, …, n
n el número de instrumentos que constituye el portafolio
σ_{ij} es la matriz de covarianza entre los rendimientos de la i-ésima acción y la j-ésima acción.
R_i es el valor esperado de la i-ésima acción.
$W_i W_j$ son los pesos de la inversión de la -ésima acción y la j-ésima acción respectivamente.

Como se puede observar un portafolio de inversión puede resolverse como un problema de optimización numérica que se define como la maximización o minimización de una serie de recursos representados por un conjunto de funciones matemáticas. Durante el proceso se toma en cuenta las limitaciones asociadas a la función, las cuales son expresiones matemáticas del problema y reciben el nombre de restricciones.
De manera general un problema de optimización numérica global encuentra un vector $\vec{x}$ tal que optimice $f(\vec{x})$ donde $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$representa el valor de las soluciones $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3 \ldots x_n]^T$ cada x_i, i=1, …, n tiene límites inferior y superior $L_i \leq x_n \leq U_i$. Lo anterior permite obtener un óptimo rendimiento (representado por $\vec{x}$) de un problema cuya formulación matemática es representada por $f(\vec{x})$. Este es un valor dentro de un espacio de búsqueda que cumple con ciertas restricciones y que hace que el costo global del problema sea un máximo o un mínimo [3], [4].

Ahora bien un problema de optimización numérica como el portafolio de inversión puede resolverse por medio de técnicas de inteligencia computacional como los algoritmos evolutivos, cuyo origen se remonta a la década de los 60, se componen de una población $P(t) = \{x_1^t, x_2^t, \dots, x_n^t\}$ en un proceso iterativo t, donde n, es el tamaño de la población, una función objetivo a evaluar durante cada t y una serie de operaciones matemáticas que permiten introducir variabilidad a la población $P(t)$ [4].

2. SOLUCIÓN DE PORTAFOLIOS DE INVERSIÓN POR MEDIO DE ALGORITMO EVOLUTIVOS

En la literatura especializada se ha documentado la optimización de portafolios de inversión de diversos países. En [5] se optimizó un portafolio de inversiones con instrumentos bursátiles del año 2013 pertenecientes a la bolsa de valores de Colombia haciendo uso del modelo de multiplicadores de LaGrange, e define como el procedimiento para encontrar los máximos y mínimos de funciones de múltiples variables sujetas a restricciones que permiten transformar el problema restringido de n variables a uno sin restricciones como $n+k$ variables, donde k es igual al número de restricciones. Otro acercamiento al diseño de portafolios de inversión se encuentra en [6] donde se usó redes neuronales para predecir el comportamiento futuro de los portafolios de inversión siguiendo las siguientes etapas: Recolección de los datos, entrenamiento de la red, ejecución de la red neuronal, posteriormente se obtienen los resultados y por último se realiza la predicción. Esto consiste en predecir cómo será el comportamiento de las variables en un tiempo determinado. En [7] se realiza la optimización de un portafolio de inversiones mediante el uso del Modelo Media-Varianza de Markowitz tomando como referencia los activos financieros de la Bolsa Mexicana de Valores Mexicano del periodo del 1 de enero de 1999 al 25 de febrero del 2014, usando como técnica de inteligencia artificial un algoritmo evolutivo multi objetivo con codificación binaria, lo cual crea cromosomas de extensión larga. En [8] usando un contexto de solución basado en Frentes de Pareto se optimizó un portafolio realizado con acciones de la Bolsa Colombiana de Valores usando como función objetivo el modelo de Markowitz. Como se muestra las soluciones que aportan la literatura especializada se basan en codificaciones binarias y problemas multi objetivo. Con esto en mente se realizar una comparativa entre dos tipos de algoritmos genéticos con codificación real y una sola función objetivo.

3. METODOLOGÍA.

En esta sección se muestran las consideraciones de diseño del portafolio de inversión óptimo que se propone obtener este artículo, en primer término, se menciona las acciones que de la Bolsa mexicana de valores que son consideradas en este trabajo, posteriormente se muestran aspectos teóricos de los algoritmos que se constituyen como objeto de estudio del presente trabajo, por último, se describen los operadores genéticos usados.

3.1. Portafolio propuesto

Como se muestran en las ecuaciones (1), (2), (3) establecidas por Markowitz es necesario elegir un conjunto de acciones en este caso se propone utilizar las acciones de las empresas que se muestran en la tabla 1, al día 17 de febrero del 2016. La matriz de covarianza mencionada en la ecuación (2) se calcula utilizando las mencionadas acciones en un periodo del 17 de febrero del 2015 al 16 de febrero del 2016. Cabe destacar que estas fueron elegidas por su desempeño.

Tabla 1 Acciones para la formación del portafolio

Acción	Valor de la acción
Aeromex	40.02
Bimbo	51.27
Cemex	9.57
Elektra	351.7
Herdez	42.99
Ienova	73.92
Kimber	40.75
Oma	85.73
Soriana	40.51
Walmex	42.26

3.2. Algoritmo Genético.

Los Algoritmos Genéticos (AG) son técnicas evolutivas que explotan la búsqueda aleatoria, soportan su funcionamiento en la teoría de la evolución de Charles Darwin y las leyes de la herencia de Mendel. Estos permitieron a John Holland proponer un método computacional de solución de problemas de optimización basado en un número finito de elementos denominados cromosomas, que en son en conjunto denominados población. Un cromosoma es representado tradicionalmente por medio de una cadena de números binarios; al ser evaluado es calificado por una función matemática denominada función objetivo, los cromosomas mejor valorados son seleccionados para ser recombinados para generar nuevos cromosomas. Los cuales en un porcentaje bajo son modificados por medio de un operador de mutación, Posteriormente los cromosomas con menor desempeño en la función objetivo son reemplazados con los nuevos cromosomas generados del proceso de recombinación; esto se realizará de manera iterativa hasta el cumplimiento del criterio de convergencia hacia cierta solución o por un determinado número de iteraciones. Estos pasos constituyen un algoritmo genético simple y se muestra de forma gráfica en la Fig. 1 [9].

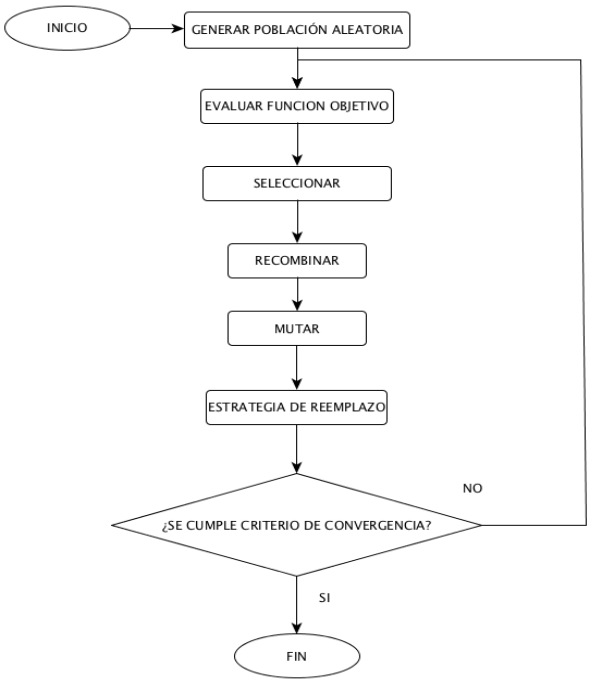

Figura 1 Diagrama de Flujo de un Algoritmo Genético canónico

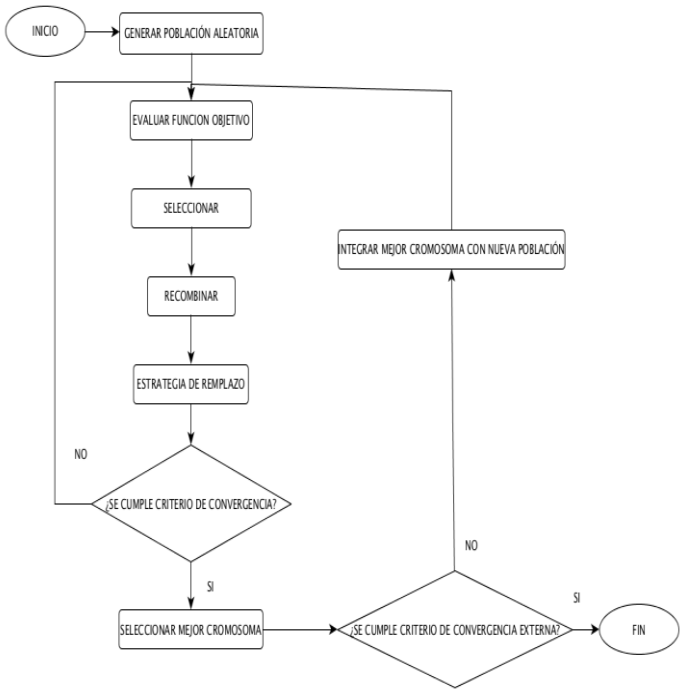

Figura 2 Diagrama de Flujo de un Micro Algoritmo Genético

3.3. Micro Algoritmo Genético

El proceso iterativo involucrado en un algoritmo genético tiene un alto costo computacional que se incrementa en función de la longitud de los cromosomas, una alternativa para reducir tal costo es el diseño de algoritmos con poblaciones pequeñas, que realizan menos evaluaciones de la función objetivo [10]. El termino de micro Algoritmo Genético (μ-AG) fue concebido a partir de algunos resultados teóricos con una población de 3 individuos que garantizaban la convergencia de manera independiente del número de genes del cromosoma. El primer reporte que se tiene de la implementación de un μ-AG fue realizado por Krishnakumar [10], donde proponía un algoritmo con 5 individuos generados de forma aleatoria con un factor de cruza de 100% y una mutación del 0%, también propuso un proceso de elitismo por medio del cual seleccionaba al mejor individuo y lo copiaba a la nueva población de la siguiente generación. La Fig. 2 muestra el esquema general de un micro-AG.

3.4. Operadores.

Como se mencionó en la sección 2 de este documento, un algoritmo genético tiene una función objetivo, la cual para este caso se puede construir a partir de las ecuaciones (1), (2), obteniéndose (4)

$$f_{obj} = \max\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} R_i\, W_i}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\, W_i W_j}\right) \qquad (4)$$

La colección de sujetos propuestos como posibles soluciones son generados de manera aleatoria 5 en total, para el Micro Algoritmo Genético y 100 para el Algoritmo Genético con una distribución uniforme, codificando los cromosomas con números reales, a diferencia de lo expuesto en la literatura especializada por lo tanto es posible describirlos matemáticamente como:

$$\text{cromosoma} = [\,R_1, R_2, \ldots R_{10}]^{\mathrm{T}}$$

Los cromosomas de la forma $[\,R_1, R_2, \ldots R_{10}]^{\mathrm{T}}$ que se seleccionaron para el cruzamiento en sucesivas generaciones

fueron escogidos mediante elitismo, donde los sujetos con las afinidades mas altas, en la función objetivo de la ecuación 4.
Dada la naturaleza continua de los algoritmos propuestos en este trabajo se propone para ambos el uso del operador de cruzamiento denominado BLX-α. En este los cromosomas descendientes H_i^1 y H_i^2 son generados en un intervalo aleatorio uniforme determinado por la ecuación 5 para cada $i - esimo$ cromosoma

$$H_i^n = [\min(C_i^1, C_i^2) - I * \alpha, max(C_i^1, C_i^2) + I * \alpha] \quad (5)$$

Donde α es un parámetro constante en un intervalo [0,1], mientras que $I = max(C_i^1, C_i^2) - \min(C_i^1, C_i^2)$
En la mutación se alternan de manera aleatoria dos individuos por cada generación en el algoritmo genético canónico. Para esto se utiliza el operador genético de mutación con distribución normal, donde a partir de un cromosoma C_i'se puede obtener un cromosoma C_i'' transformado o mutado desde la siguiente expresión, donde el tamaño de paso de la mutación $\beta =$ [0,1] y la dirección $d =$ [0,1] esto se representa por (6). Cabe destacar que este operador no es aplicado al μ-AG

$$C_i'' = C_i' + \beta * d \quad (6)$$

A partir del anterior se plantea una serie de experimentos que se describen en la tabla 2, sus resultados se muestran en la sección 5 cuya finalidad es demostrar la pertinencia de algoritmo μ-AG, como un método optimización de portafolios de inversión construidos por medio de la ecuación de Markowitz. Esto con la finalidad de estudiar la repetitividad es decir la estabilidad del algoritmo, se realizan 35 ejecuciones y se analizan estadísticamente

Tabla 2 Experimentos propuestos

Experimento	Técnica	Porcentaje de cruza	Porcentaje de mutación	Numero de Cromosomas iniciales
1	GA	80%	15%	100
2	GA	80%	10%	100
3	μ-AG	80%	10%	5

4. RESULTADOS.

Las Figuras 3, 4 y 5 muestran las convergencias de los algoritmos detallados en la tabla 2. Se observa que la convergencia más rápida se obtiene con el μ-AG.
Por otra parte, la tabla 3 muestra los montos de inversión sugeridos, resultado de cada experimento.La tabla 4 muestra los resultados estadisticas realizados sobre 35 ejecuciones,(en rojo los mejores resultados) lo cual permite determinar cual algoritmo cumple con los mejores criterios de estabilidad a traves del calculo de la repetitividad (desviación estandar entre media aritmetica), Ademas se aplico un test de Kolmorov-Smirnov, (con la finalida comprobar el comportamiento estocastico de los algoritmo propuestos). La tabla 4 muestra, de acuerdo al test de normalidad de Kolmorov-Smirnov, que todos los experimentos tienen un comportamiento estocastico. A partir de esto se plantea un test de Anova con la finalida de determinar si existen diferencias estadisticamente significativas entre los experimentos desarrollados en este trabajo. Los resultados se muestran en la tabla 5

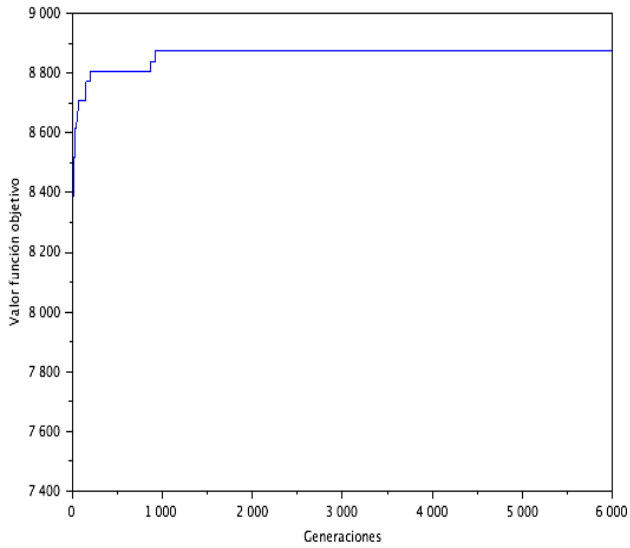

Figura 3 Respuesta del Algoritmo Genético Canónico (experimento 1)

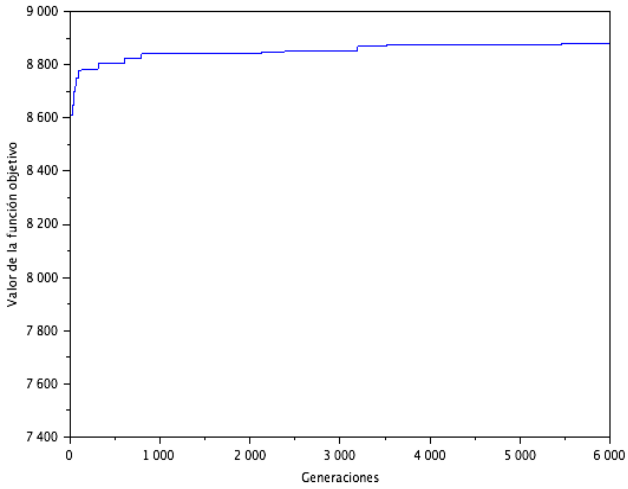

Figura 4 Respuesta del Algoritmo Genético Canónico (experimento 2)

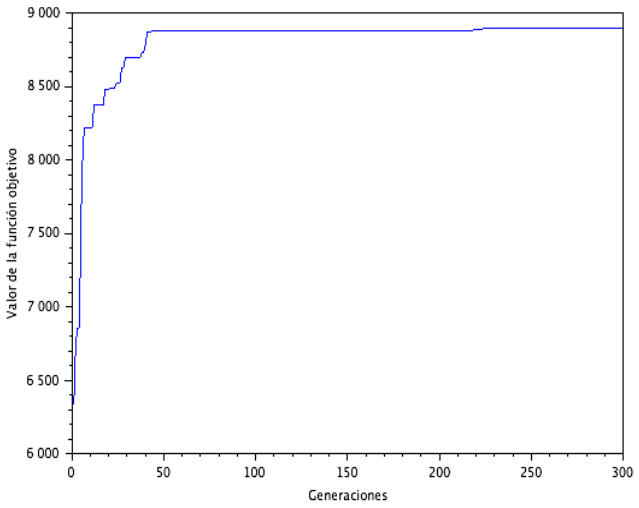

Figura 5 Respuesta del μ-AG. (experimento 3)

Acción	μ-AG	Algoritmo Genético Canónico
Aeromex	0.0463370	0.0569187
Bimbo	0.1691534	0.0128375
Cemex	0.1546144	0.0025037
Elektra	0.0360046	0.3643976
Herdez	0.1485156	0.1524520
Ienova	0.1174984	0.1299851
Kimber	0.1594509	0.0433921
Oma	0.0049625	0.0896043
Soriana	0.0412498	0.0563218
Walmex	0.1222133	0.0915873

Tabla 3 Montos de inversión

Tabla 4 Montos de inversión

Experimento	Valor Maximo	Valor Medio	Desviación estandar	Repetitividad	Significancia asintotica (Kolmorov-Smirnov)
1	8885.4897	8844.6602	19.85994402	0.224541627	.958
2	8874.602	8839.0847	22.93428018	0.259464423	.798
3	8912.2303	8907.41678	2.42373758	0.02721033	.814

Tabla 5 Análisis de Anova

		Suma de Cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F	Significancia
Valor de la función Objetivo	Entre Grupos	100785.27	2	55294.83	163.21	0
	Intra Grupos	31362.57	102	307.48		
	Total	132278.56	104			

La tabla 5 muestra una significancia menor a 0.05, con esto se afirma que los grupos son estadisticamente diferentes. Por lo tanto se aplicó el test de Tukey con la finalidad de determinar cual de los algoritmos tiene el mejor comportamiento. Los resultados se muestran en la tabla 6. En ella se puede observar que los experimentos 1 y 2 es decir los realizados con el algoritmo genético canónico son estadisticamente iguales, mientras que el experimento 3, representativo del μ-AG, es diferente y con un valor medio de la función objetivo mayor (resaltado en rojo) que las alternativas con el algoritmo genético canónico.

Tabla 6 Test de Tukey

	Subconjuntos para alpha =0.05	
Experimento	1	2
1	8844.6603	
2	8839.0847	
3		8907.41678
Significancia		

5. CONCLUSIONES.

A partir de las pruebas estadísticas mostradas se puede observar que el μ-AG presenta las siguientes ventajas:

a) De acuerdo a la Tabla 4, la repetitividad (cantidad que representa la proporción de números que se alejan de la media) es más baja, por lo tanto, mejor que la obtenida de los Algoritmos Genéticos Canónicos
b) De acuerdo a la Tabla 4 se obtiene en promedio el mejor valor de la función objetivo a evaluar.
c) Convergencia más rápida, conforme a lo mostrado en las figuras 3 y 4 (el μ-AG converge en 45 generaciones a diferencia de las aprox. 2000 del GA)

Las tablas 5 y 6 muestran que los experimentos realizados con el GA son estadísticamente iguales. Se observa, de acuerdo al test de Tukey, que el μ-AG es una técnica diferente a un algoritmo Genético Canónico y nuevo de acuerdo a lo revisado en la literatura especializada. Se demuestra que los cromosomas con baja aptitud al recombinarse con un cromosoma de valor alto inciden en la convergencia del algoritmo.

Después de demostrar la eficiencia del algoritmo es factible la construcción de un portafolio con datos actuales. También se sugiere ampliar el periodo de tiempo que se usa para calcular la matriz de covarianza.

A futuro se plantea usar el μ-AG en otros modelos de portafolio de inversión. Además de su uso en otros contextos tales como la Electrónica de Potencia o la Ingeniería de Control

6. REFERENCIAS

[1] Borge Vergara Juliana, Cervantes Luna Ma. Natalia. “Portafolios de inversión: Una alternativa para el aprovechamiento de los recursos remanentes de tesorería”. Tesis de Licenciatura. Universidad del Rosario. Bogota D.C (2012).
[2] Ochoa García S. Ibeth. “El modelo de Marckowitz en la teoría de portafolio de inversión”. Tesis de Maestría. , Instituto Politécnico Nacional. México, D.F (2008).
[3] Gutiérrez Méndez Fernando, Diciembre 2011, “Optimización Multiobjetivo Usado Algoritmos Genéticos Culturales”, Tesis de Licenciatura, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México Distrito Federal, (2011)
[4] Franco Gómez J. Alberto, “Un Algoritmo Basado en la Optimización por Enjambre de Partículas para el Problema de Asignación Axial 3-Dimensional”, Tesis de Licenciatura, Instituto Tecnológico de la Paz, La Paz, Baja california Sur, (2011).
[5] Cruz Trejos E. Arturo, Medina Varela P. Daniel, Salazar Arias H. Darío. “Optimización de portafolios de acciones utilizando los multiplicadores de LaGrange”. Universidad Tecnológica. Pereira, Colombia. (2014).
[6] Robledo Escobar J. Paola, García Gómez Catalina. “Portafolios de inversión a través de redes neuronales”. Universidad Tecnológica. Pereira Colombia. (2008).
[7] Castro Enciso S. Fernando, “Creación de Portafolios de Inversión utilizando Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo”, Tesis de Licenciatura, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México, D.F, (2005).
[8] Henao Perez Alvinn A. “Creación de un Portafolio de Inversiones Constituido por Valores Primarios Transados en la Bolsa de Valores de Colombia, Empleando Optimización Multiobjetivo”, Tesis de Maestría, Universidad del Norte, Departemante de Ingeniería Industrial, Barranquilla, (2007).
[9] Toscano Pulido Gregorio, “Optimización Multiobjetivo Usando un Micro Algoritmo Genético”, Tesis de Maestría, Universidad de Veracruz Arte Ciencia Luz, Veracruz (2001)
[10] Peña Koo Jimmy J., “Desarrollo de un Applet del Micro Algoritmo Genético usando Optimización Multiobjetivo”, Tesis de Licenciatura, Universidad Autónoma de Yucatan, Mérida, Yucatán, (2002).